
Accessions
Shelf No.
Q.XOX.31
SICUT PATRIBUS SIT DEUS NOBIS
BOSTONIA CONDITA AD 1630.
CIVITATIS REGIMINE DONATA AD 1822
NATH. BOWDITCH, OB. MAR. XVI. MDCCCXXXVIII
BOSTON PUBLIC LIBRARY
FROM THE
Bowditch Fund.
Rec'd.

In hoc opere contenta.

Arithmetica decem libris demonstrata
Musica libris demonstrata quattuor
Epitome ī libros arithmeticos diui Seuerini Boetij
Rithmimachie ludus q̄ ⁊ pugna nūerorꝫ appellat̄

G. Gonterius Cabilonensis: in
laudē Arithmetices ⁊ Musices.

Tempore iam multo docte latuere sorores:
Quas retinet comites flaua minerua suas.
Nūc placide terras post tempora multa reuisunt.
Grata quoqꝫ ante alias Gallica terra placet.
His olim celebris fuit omnis Acaica tellus.
Pythagora patriam diffugiente samon.
Hellada nunc linquunt: et doctas palladis vrbes.
Sequaniosqꝫ petunt/parhisiosqꝫ lares.
Hec venit omnimoda numerorum cincta cāterua.
Atqꝫ docet numeris quidquid in orbe situm est.
Altera dulcisono cantu/fidibusqꝫ canoris
Edomuisse viros traditur atqꝫ feras:
Que sua Pierijs tenet vnica nomina musis
Quo nichil hac musis gratius esse solet.
Attamen artificem stapule misere marine:
Qui leta hoc studijs fronte dicaret opus.
Hoc solum studium atqꝫ hec illi cura: iuuare/
Irritus et ne sit/dispereatqꝫ labor.

Noua ꝯmentatio in Jordanū per Jacobum fabrū stapulēsem laborata ad clarissimum virum Joannem de Ganay presidentem parisiensem.

Paucis me digne āmonuisti Clarissime vir: quot cognita ꝯmoditates adducat disciplinarum parens arithmetica/ q̄tq; ignota relinquat tenebras. vt quē nullius discipline fugiat studium. In primis eni legum autoritas (in quibus potissimū tua versat opera) tibi numeris egere visa est. vt q̄ iusticiā vnicuiq; ꝓ dignitate dispēsat: nunc Arithmetica/ nūc vo Geometrica rōne ꝯstantē. que agros/ agrorū limites/ aquaꝝ diuergia/ alluuionesq; ⁊ pleraq; silia sollicite ꝯsiderat q̄ a Mathematico destituta ꝑsidio nunq̄ plane assequi valeat. Hinc imperatores rhomani Vespasian⁹/ Adrianus/ Traian⁹/ Theodosius/ Archadi⁹/ Honorius/ Constātinus ⁊ alioꝝ q̄plurimi legūtur peritos agrimēsores instituisse: qui podismorum rōem ad publicam vtilitatē tenerent quā numeroꝝ ꝑficit sagacitas. Hic Lucius Moderatus illaꝝ reꝝ studiosus insignem libellū reliquit. Et Arithmetica cōtēplatio rite cognita facilem ꝑbet musicaꝝ modulationū intelligentiā/ astronomicarūq; subtilitatū ingressus. et prisca Theologia numeris olim vt quibusdā ad diuina gradibus tota innitebat: q̄uis ⁊ nūc in sacris litteris sua retineāt mysteria nūeri. Tolle igit numeros/ numerorūq; disciplinā: leges impficis. iusticia ceca relinqtur. nulla modulationū reperiet regła. nullus celestiū ꝯtemplationū aditus. sacraꝝ lraꝝ delitebūt mysteria: imo ⁊ vniuersa philosophia q̄ pariter humanoꝝ/ diuinorūq; cognitio describit. Quecquid ē ꝯmoditates assecute discipline/ atq; incōmoda neglecte ꝑscos minime latuere: vt q̄ haud alio tramite crediderint q̄ ꝑ eā incedētes nos posse q̄cq; digna satis ꝯtēplatiōe cognoscē. Pythagoras eni sine nūeroꝝ ꝑsidio nichil posse sciri ꝯtēdebat. et Plato in sue academie vestibulo hoc insculpsit epigrāma. Nemo huc mathematice expers introeat. qui i toto ferme Timeo de natā reꝝ ꝑ numeros disputat: ⁊ in octauo ⁊ nono reipublice mlta de hac re disserit. que Theon smirneus mathematicus ob rei arduitatem intacta reliquit. Quapropt non ab re dolebas hāc numerosam hui⁹ almi parisieñ studij philosophātiū turbā et bonaꝝ lraꝝ cupidā: tā necessaria semita/ tum ad diuina assurgēdi/ tum descēdēdi ad hūana esse destitutam. Accipe ergo nūc bñfactor vnice decem Arithmetice discipline Jordani clarissimi viri libellos noua cōmentatiōis luce nr̄is laboribus illustratos/ tuoq; nomini dicatos qui cōmoditates enumeratas secū afferre valebūt sufficiētissime. Et si iubes opus tuis auspicijs absolutum iam migret ad ceteros. vt vel sic intelligant omnes presertim tibi se gratias habituros per quem fuerint hanc litterariam facultatem assecuti. Vale felicissime.

Argumentum decem librorum Jordani.

Primus passiones numeroꝝ cōmunes: suaꝝ partium/ et quātū ex diuisi numeri partibus fiat discutit.

Secundus est de proportionum et proportionalitatum cōmunibus passionibus.

Tertius de numero primo/ composito/ ad alterum primo/ et numeris in aliqua proportione minimis.

Quartus de numeris continue proportionalibus/ cōmensurabilibus ⁊ incōmensurabilibus.

Quintus de additione/ subtractione/ et partitione proportionum.

Sextus de numeris quadratis/ cubicis/ superficialibus similibus/ et solidis.

Septimus de numero pari/ impari/ pariter pari/ pariter ipari/ impariter pari/ perfectis/ abūdantibus/ et diminutis.

Octauus de formis numerorum: trigonis/ tetragonis/ pentagonis/ hexagonis/ heptagonis/ octogonis/ pyramidibus/ serratilibus/ et tesseris.

Nonus de equalitate/ inequalitate/ multiplicibus/ superparticularibus/ et superpartientibus

Decimus de medietate Arithmetica/ Geometrica/ Musica: et de medietatibus minus principalibus.

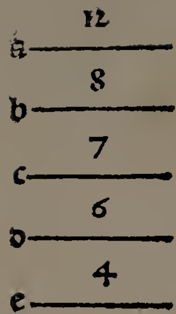
¶ Iordani Nemorarij Clarissimi viri Elementa Arithmetica: cū dēmōstratiōibus Iacobi Fabri Stapulensis: ad Ioannē de Ganay Senatorē Parisiensem.

v Nitas est rei per se discretio. Numerus est quātitas discretorum collectiua. Naturalis series numerorum dicitur: in qua ſm vnitatis adiectionem fit ipsorū computatio. Differētia numerorum appellat̄ ille: quo maior super minorem abūdat. Numeri ab aliis equidistare dicūtur: cum ipsorū ad illos equales sunt differentie. Numerus per alium multiplicatur: qui toties coacervatur sibi: quoties in multiplicāte est vnitas. et qui ex multiplicatione concrescit: productus nominatur. Numerus alium numerare dicitur: qui ſm aliquem multiplicatus illum producit. Pars est numerus: numeri minor maioris: cum minor maiorem numerat. et qui numeratur: numerātis multiplex appellatur. Denominans est numerus: ſm quem sumitur pars in suo toto. Similes dicūtur partes: que ab eodem numero denominantur. Numerus ſm quem alius diuiditur: diuisor nominatur. partes vero in quas distribuitur: diuidētia appellantur. Prima et simpla nūeri pars: est vnitas. quādo duo numeri partem habuerint cōem: quoties eadem pars fuerit in minore: tot partes maioris dicetur esse minor et tote partes quoties ea cōmunis pars fuerit in maiore. ¶ Dignitates.

1 Omnis numeri pars: est minor suo toto.
2 o Omnis minor est: que maiorem habet denominationem
3 Quicunqꝫ equalium siue eiusdem eque multiplices fuerint: ipsi quoqꝫ erunt equales.
4 Quibus idem nūerus eque multiplex fuerit: siue quorū multiplices eq̄les fuerint: ipsi etiam sunt equales
5 Omnis numeri pars est vnitas: ab ipso denominata.
6 Quilibet numerus totus est ab vnitate: quota pars ipsius est vnitas.
7 Si vnitas in aliquem numerum ducatur: siue idem in vnitatem: seipsum producit.
8 Extremorum differentia ex differentiis eorūdem ad medium est composita.
9 Si numerus numerum superet: differentia minori addita: aut a maiore sublata: numeri relinquuntur equales
10 Qui eidem equantur: inter se sunt equales.
11 Et si ab equalibus equales aut idem cōmunis dematur: relinquūtur equales.
12 Et si ab equalibus dempti sint inequales: relinquentur inequales.
13 Si duo maiores simul addātur pariter et duo minores simul: maiorum compositum composito minorum maius euadit.
14 Si equales equalibus addas: toti quoqꝫ fient equales.
15 Et si inequales equalibus: toti erunt inequales.
16 Partes simul: suo toti equantur.
17 Quorūcunqꝫ ad eundem numerum proportio est vna: ipi inter se sunt equales.
18 Quoties numerus a numero substrahi potest: toties in eodem numerabilis est
19 Proportiones que ex equalibus constant ꝓportionibus: inter se sunt equales.
20 Quorū dimidia sunt equalia: et toti sunt equales. ¶ Petitiones.

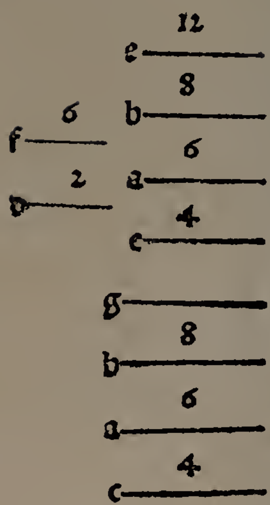
1 Cuilibet numero: quotlibet posse sumi equales.
2 c Quolibet numero: aliquem q̄tūlibet esse maiorem.
3 Seriem numerorum in infinitum posse extendi.
4 Nullum numerum in infinitum decrescere.
5 Maius non numerare minus
6 Si numerum datum numerus multiplicet: idēqꝫ ꝓductum diuidat: numerū datum redire. et contra si aliq̄s numerus datum numerum diuidat: et quod prouenit rursum multiplicet: itidem numerum datum redire.

¶ Dignitates atqꝫ petitiones paucas vt disciplina se faciliorē vbiqꝫ prestet / adiecimus: quas passim necessarias tanq̄ omnibus notas autor suppressit.



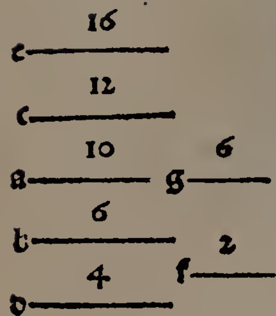
Omnis numerus minor: maioris aut pars est aut partes. 1

Sint a/b/c/d quotlibet numeri. a maior: et b c d minores. dico b esse partem aut ptes a: et c et d silr. Nam aut minor numerat maiorem vt d numerat a: et tunc d per diffinitionem est pars a. aut mīor nō numerat maiorem queadmodum b non numerat a: sed est alius eos cōiter numerans qui sit e. et tunc quoties e fuerit in b minore: tot partes b minor per vltimam diffinitionem erit a maioris. qđ si mīor non numerat maiorem vt c: non numerat a. neqз numerus cōis eos numerat: cum per quintam conceptionem cuiuslibet numeri vnitas sit pars ab ipso denomīata: per vltimam diffinitionez idem efficis. constat igitur oēm minorem maioris esse partem aut partes.



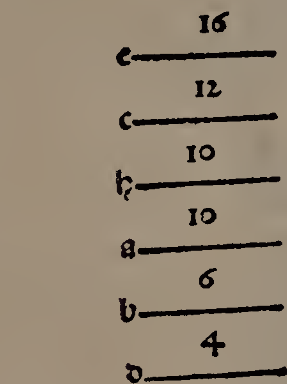
Omnis numerus/circum se positorum et equaliter ab eo distantium est medietas. Et si eorūdem fuerit medietas: illos ab eo equidistare conueniet. 2

Sit a quicunqз numerus: et b et c circumpositi et ab eo equidistantes. b maior: et c minor. et sit d differentia cōmunis eadem b ad a: et a ad c. sitqз e numerus cōpositus ex b et c. dico a esse medietatem e. et si a sit medietas e: dico b et c circumpositos equidistare ab a. Primum autem sic ostenditur. nam q̄tum a superat c: tm̄ b superat a. dempta ergo d cōi differentia ab b: per scđam partem none dignitatis residuū b equatur a. sed et eadem differentia d addita c qđ sit f per primam partem eiusdē dignitatis equatur a. ergo per decimū ꝓloquiū residuū b et f que eidem numero a equātur: inť se equabūtur. sed residuum b et d et c silr̄ p decimāsextā dignitatem equātur e. igitur et residuū b et f que equanť residuo b et d et c simul etiā equātur e. et residuū b: et f monstrata sunt equalia. igitur f est medietas e sed f monstratus est equari a: igitur a medietas est e. qđ est primum. et in oībus aliis cōsimili agatur argumento. Scđm aūt sic pз: sit a medietas numeroꝝ b et c simul iunctoꝝ. si b c non equidistant nūero a: eoꝝ differentie ad a per diffinitionem nō sunt equales. sit igitur d differentia a ad c illoꝝ numeroꝝ minimum addo d ad a: et compositus sit g. qꝛ igitur a ad c differētia est d et eadem differētia est g ad a igitur per diffinitionem g et c equidistāt nūero a. qꝛ ergo g et c equidistant a per immediate mōstratū a ipsoꝝ simul iunctoꝝ est medietas. sed et a poniť medietas b et c simul iunctoꝝ. per tertiā igiť ꝯceptionem b c simul: et g c simul eidē numero a eque multiplices adinuicem sunt equales. ab vtroqз igitur dempto cōi numero c per vndecimā cōem scientiam residui b et g adinuicem sunt equales. que igitur differentia g ad a: eadem erit b ad a. quare equidistabūt b et c ab numero a. qđ est ꝯtra hypothesim et propositum.



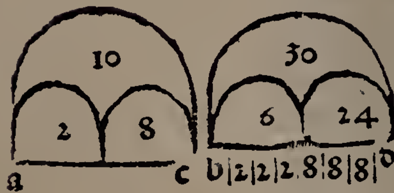
Si duo numeri a duobus numeris circum se positis equaliter distent: illis ꝯiūctis erunt equales. Et si eis equales fuerint: ab ipsis equidistare necesse est. 3

Eadem que in precedenti demōstratio est. Sint igiť a et b inter c et d equidistātes: c maximus et d minimus et f differētia cōis: sitqз e ꝯpositus ex c d: et dr̄ia e ad a sit g. dico numeros a b simul iunctos equales esse c d simul iūctis. et ꝯtra si c d simul iuncti sunt equales a b simul iūctis: a b equidistantes esse c d. Primū patet: nam cū d differētia sit e ad c Est eniз d numerus quo superat e numerū c: g dr̄ia extremoꝝ e a cōstabit ex d f differētiis scз extremoꝝ ad medium c. Est eni vt ostensum est d differētia e ad c et f differētia c ad a per hypothesim: cū posita sit f cōis differētia c ad a et b ad d. at qꝛ b cōstat ex eisdem: qđ patet nam cū f sit differētia b ad d: ea siquidē differētia f addita minori numero d p nonā ꝯceptiōem reddit b. est itaqз b equalis g. quare e ꝯstabit ex a b: cū per eādeз ꝯceptionē ꝯstituatur e ex a et g sua quidem differentia ad a: que equatur ipsi b. Sunt igitur a b iūcti et c d iuncti eidem tertio e equales: adinuicem equales. qđ est primum. Rursum dico si c d simul equantur a b simul: etiā a b equidistare c d. Nam capio h qui equidistet ad c q̄tum b ad d: qui h b quia sic equidistabunt: per immediate monstratum h b simul equātur c d. sed et a b ponūtur eisdem c d simul iunctis equari. quare h b et a b eidem tertio equales: adinuicem equabūtur. Substracto igitur ab vtroqз cōi b: remanent p cōem sciam h et a adinuicem equales. ergo equalis differētia a ad c et b ad d. quare p diffinitionem adinuicem equidistabunt. quod est scđm atqз totum propositum.



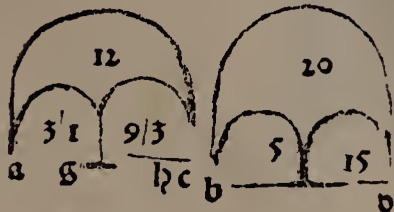
Si fuerit primus scđi quota pars tertius quarti: erunt primus et tertius tota pars secundi et quarti: quota primus secundi. 4

Sit a primus numerus: b secundus: c tertius: et d quartus. quia a tota pars est ipsius b: quota ps c est ipsius d: intelligo b et d in similes illas partes diuisos. et quia prima vnius cum prima alterius est tanq̄ a c: et similiter scđa cum secūda. et hec coniūctio toties fieri potest quoties p̄mus in secūdo. toties igitur numerus equalis a c primo et tertio: sumi potest in b d secūdo et quarto: quoties a in b. quare a c simul primus et tertius per diffinitionem erūt similis et tota pars secundi et quarti quota primus secundi. quod est propositum.

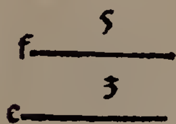


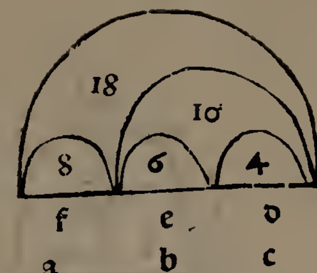
Si fuerit primus tote partes secundi quote tertius quarti: erunt primus et tertius tote partes secundi et quarti: quote primus secundi. 5

Sit vt prius primus numerus a: secūdus b: tertius c: et quartus d. sitqз a partes b sumpte ꝺm e et denominate in b ꝺm f. sitqз g vna illaꝝ partium a: et h vna partium c. cū igitur g primus tota pars sit b secūdi quota h tertius est d quarti: per premissam compositum ex g et h primo et tertio tota ps erit b d secūdi et quarti: atqз denominata ꝺm f. at partes a et c sumūtur ꝺm e: erunt igitur partes a et c ad b d sumpte ꝺm e: et denominate ꝺm f. quare et similes et quote partes fuerit a in b. qđ est propositum

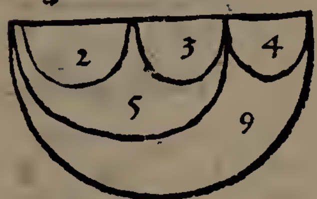


Si fuerint quotlibet numeri totidem aliis eque m'tiplices: erit quoqз compositus ex eis composito ex illis eque multiplex. 6



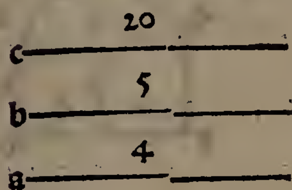


¶ Sint a.b.c.d.e.f quotlibet numeri:sintq; d e f eq̄ multiplices a b c singulis singuli:intelligo itaq; a primum.d scd̄m.b tertium.e quartum:eritq; per penultimam compositus ex a b pmo ⁊ tertio tota pars compositi ex d e secūdo ⁊ quarto quota pars a est d.quare compositus ex d e eque multiplex ad compositum ex a b vt d ad a.Facio itaq; numerum ex a b compositum primum:et compositum ex d e scd̄m et c tertium et f quartū:et cōsimiliter argumentor.quia quota pars a b ad d e:tota pars c ad f. cōpositus igitur ex a b ⁊ c primo ⁊ tertio tota pars erit compositi ex d e et f secūdo et quarto:quota pars a b ad d e.q̄re compositus ex d e f eque multiplex ad compositū a b c vt d ad a.et ita si cōplures nūeri succrescerēt:semp̄ vtare precedentium cōposito vsq; dum ad vltimū decūbas:efficiesq; ꝓpositū.

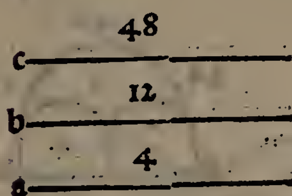


7 ¶ Si quoties vnitas in primo toties secūdus in tertio:quoties vnitas in scd̄o:toties primus in tertio.

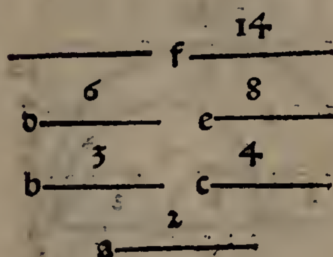
¶ Sint a b c tres numeri:a primus.b secūdus.c tertius:sitq; vt quoties fuerit vnitas in a:toties sit b in c.dico ergo ꝙ quoties vnitas fuerit in b:toties a esse in c.diuido enī a primum nūerū in vnitates ⁊ c tertium in totidem partes:quaꝝ quelibet erit equalis b secundo.quia enī quoties prima pars a in prima parte c toties secūda in secūda:et tertia in tertia:et ita deinceps.ergo per precedentem cōpositus a tota pars erit compositi c:quota pars prima pars eius ad primam partem c:et c eque multiplex ad a vt eius prima pars ad primam ptem a.at quoties vnitas in b:toties prima pars a in pma parte c.Nam vnitas equatur pme parti a:⁊ b prime parti c.ergo quoties vnitas in b secūdo:toties a primus in c tertio.quod erat demonstrandum.



8 ¶ Si alterna fiat duoꝝ numerorum multiplicatio:idem numerus vtrobiq; ꝓueniet.
¶ Ut si a multiplicat b et proueniat c:dico etiā si b multiplicat a itidem prouenire c.nam si a multiplicat b et ꝓueniat c:per diffinitionem quoties erit vnitas in a:toties erit b in c.ergo per premissam quoties vnitas in b secūdo:toties a primus in c tertio.per diffinitionem igitur si a sibi toties cocerua tur quoties vnitas in b:per diffinitionem a per b multiplicatur.at cum hoc fit prouenit c.nam ꝓbatū est a toties coaceruari in c:quoties vnitas in b.constat ergo propositum.



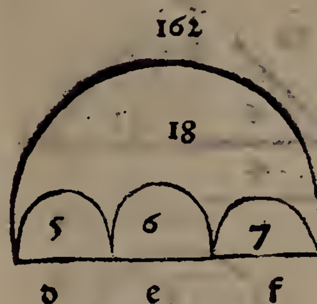
9 ¶ Quod fit ex ductu alicuius numeri in quotlibet:tm̄ est q̄tum est quod fit ex ductu eiusdem in compositum ex illis.
¶ Sit a numerus qui ducatur in b et proueniat d:et in c et proueniat e:dico ergo ꝙ compositus ex d e ꝓducitur ex ductu a in compositum b c.cū enim b multiplicet d scd̄m a:b per diffinitionem nūerat d scd̄m a:et per idem c numerat e scd̄m a.sunt igitur d et e eque multiplices b et c:quare per sextam compositus ex d e eque multiplex ad compositum ex b c.Sit igitur f productus ex ductu a in ꝯposito b c.cū itaq; b c multiplicet f scd̄m a:nūerabit igitur numerus b c ipm̄ f scd̄m a.quare eque multiplex f ad b c vt d ad b.sed eidem b c aggregatus d e ꝓbatus ē eque multiplex.sunt igitur d e et f eidem b c eque multiplices:per tertiam conceptionem adinuicem equales.Est igitur qd̄ fit ex ductu alicuius numeri in quotlibet tm̄:q̄tum qd̄ fit ex ductu eiusdē in cōpositum ex illis queadmodū erat ꝓpositū.



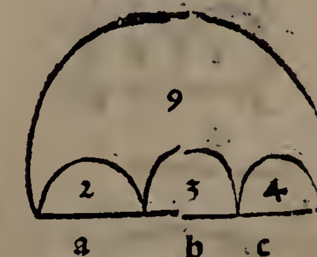
10 ¶ Quod fit ex ductu quotlibet numerorum in aliquem:equum est illi quod fit ex cōposito illorum in eundem.

¶ Sit eadem cū precedenti hypothesis sed cōuerso ordine:vt ducātur b et c in a et prouenīant d et e Dico quod fit ex ductu b et c in a singillatim equū esse ei quod fit ex composito b c in a.nam p̱ precedētem qd̄ fit ex ductu a in b ⁊ c singillatim:equū est ei quod fit ex ductu a in compositum b c.ꝙ altnatim per octauam qd̄ fit ex ductu b et c in a:equū est ei quod fit ex composito b c in eūdem.qd̄ est ꝓpositū.

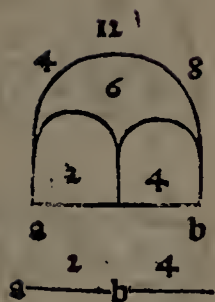
11 ¶ Quod fit ex ductu quotlibet numerorum in quotlibet numeros : equale ē ei quod fit ex composito ipsorum in compositum ex aliis.
¶ Sint a b c quotlibet numeri qui ducātur in d e f quotlibet alios vt quilibet primorum ducatur in quēlibet secūdoꝝ:dico quod fit ex ductu a b c singillatim in quēlibet alioꝝ d e f eq̄le esse ei quod fit ex ductu compositi a b c in compositum d e f.nam qd̄ fit ex ductu a b c singillatim in d:equū est ei qd̄ fit ex ꝯposito a b c in d.et cōsimiliter de ductu a b et c singillatim in e et f argumētabere qd̄ nichil aliud est ꝙ qd̄ fit ex ductu a b et c in d e et f singillatim:per precedentem equale esse ei qd̄ fit ex composito a b c in d e et f singillatim.At per nonam qd̄ fit ex composito a b c singillatim in d e et f:equum est ei quod fit ex ꝯposito a b c:in compositum d e f.quare cōstat quod fit ex ductu quotlibet numerorum in quotlibet numeros equum esse ei quod fit ex composito illoꝝ in compositum ex aliis.Et he quattuor octaua:nona:decima:et vndecima:praxim multiplicandiq; modum:plane declarant.



12 ¶ Quicunq; numerus numerat totum et detractum:numerat et residuum.
¶ Sit a b totum:a detractum et b residuum.dico ꝙ si c numerat a b et a:ipm̄ nūerare b.numeret enī a b scd̄m numerum d e et a quidē scd̄m d.quia igitur per nonam q̄tum est c in d e:tm̄ est c in d et c in e At a equale est ei qd̄ fit ex c in d:igitur a cū eo qd̄ fit ex c in e:equū est a b.quare qd̄ fit ex c in e:equū est b.sed c numerat qd̄ fit ex c in e per diffinitionem:igitur ⁊ b suū equale numerabit.qd̄ est ꝓpositū.



13 ¶ Tm̄ est qd̄ fit ex ductu nūeri in se : q̄tū qd̄ fit ex ductu eiusdem in oēs suas partes.
¶ Sit a quicūq; nūerus quē semel pono diuisum in oēs suas ptes q̄ sint b c d e:⁊ semel indiuisū:tūc qd̄ fiet ex a in b ⁊ in c ⁊ in d ⁊ e p̱ nonā equū est ei qui fit ex a in ꝯpositū ex b c d e.at ꝯpositū b c d e:est a.qd̄ fit igit̄ ex ductu numeri in oēs suas partes:equū est ei qd̄ fit ex ductu eiusdē numeri in se.q̄re ⁊ altnatim per octauam qd̄ fit ex ductu nūeri in se:tm̄ est q̄tum qd̄ fit ex ductu eiusdē in oēs suas ptes.

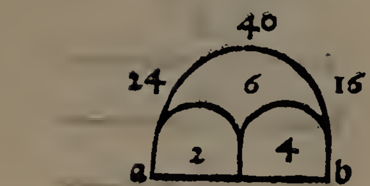


¶ Numero in duo diuiso quod fit ex ductu totius numeri in alterꝫ illorꝫ: est q̃tum qd 14
fit ex ductu eiusdem in se ⁊ in reliquum.

¶ Sit a b nūerus in duo a ⁊ b diuisus: dico qd fit ex ductu a b in a equū esse ei qd fit ex ductu a in se ⁊ in b. et ita quoqꝫ qd fit ex a b in b: equale eē ei qd fit ex b in se ⁊ b in a. ducatur ergo a b in a: tunc qd fiet ex ductu a b in a ꝑ octauam equū erit ei qd fit ex ductu a in a b. at qd fit ex ductu alicuius in a ⁊ in b equū est per nonā facto ex ductu in compositū a b. ergo cū a ducit̄ in seipm̄ a ⁊ in b: tm̄ facit q̃tum a b in a. et ita argumentare si a b ducatur in b. et consimili modo concludes propositum. Potesqꝫ id clarius videre si bis ponis a et bis ponis b.

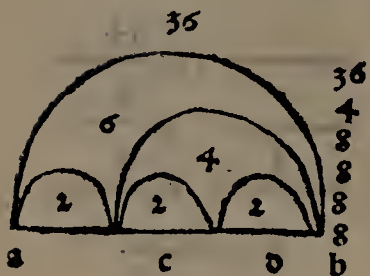
¶ Si numerus in duo diuidatur: qd fit ex ductu totius in se tm̄ est: q̃tum quod fit ex 15
ductu vtriusqꝫ diuidentium in se ⁊ vnius bis in alterꝫ.

¶ Sit a b numerus in duo a ⁊ b diuisus: dico qd fit ex ductu a b in se equū eē ei quod fit ex ductu a in se ⁊ b in se: et ex ductu bis a in b. Nam qd fit ex a b in se: equū est ei quod fit ex ductu eius in a ⁊ b ꝑ tridecimam. At qd fit ex ductu a b totius in a ⁊ in b ꝑ precedentem bis sumptam: equū est ei quod fit ex ductu a in se ⁊ in b et b in se ⁊ in a. sed qd fit ex a in b ⁊ b in a alternatim ꝑ octauā equat̄ ei qd fit ex ductu bis a in b. quod fit igit̄ ex a b in se: equat̄ ei quod fit ex a in se ⁊ b in se: et ex a bis in b qd ꝓponebatur. Et ex hoc cognoscitur modus eliciendi latus tetragonum.



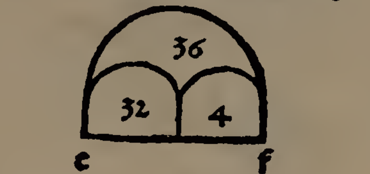
¶ Si numerus in duo diuidat̄: qd fit ex toto in se cū eo qd fit ex altero in se fit: equū 16
est ei qd ex toto in illud idem bis: qdqꝫ ex reliquo in se ducto ꝓducitur.

¶ Sit vt prius a b numer⁹ in duo a ⁊ b diuisus: dico quod ꝓducit̄ ex a b in se cū eo quod fit ex a in se: equū esse ei quod fit ex a b bis in a / ⁊ b in se. Nam qd fit ex a b in se: ꝑ precedentem tm̄ est q̃tū quod fit ex a in se ⁊ b in se: et a bis in b. quod ergo fit ex a b in se cū eo quod fit ex a in se: tm̄ erit q̃tum quod ex a in se bis ⁊ a in b bis ⁊ b in se. sed quod fit ex a in se bis / et bis in b per 14 equat̄ ei quod fit ex a b in a bis. cui adde quod fit ex b in se. tunc q̃qꝫ quod fit ex a b in se cū eo quod fit ex a in se: equabit̄ ei quod fit ex a b in a bis ⁊ b in se. quod est propositum.



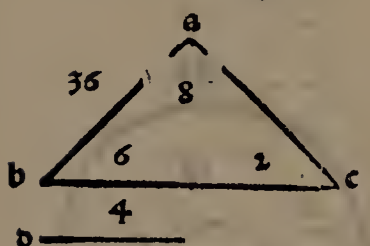
¶ Si numerus in duo diuidatur qd fit ex toto in se: equū est ei qd fit ex ductu vnius 17
partis in aliud quater: cum eo qd fit ex differentia in se.

¶ Sit a b nūerus in duo a ⁊ b diuisus sitqꝫ b maior: diuidat̄qꝫ iterꝫ b in duo scꝫ in d equale a: ⁊ c dr̄am b ad a. dico quod fit ex a b in se: equū eē ei quod fit ex ductu quater a in b ⁊ c in se. Nā ꝑ decimāquintā quod fit ex a b in se: equū est ei quod fit ex a bis in b ⁊ a in se ⁊ b in se. at ꝑ p̄cedentē quod fit ex b ī se cū a in se equali d vni ꝑtiū b: equat̄ ei quod fit ex b bis in a ⁊ c in se: q̄re alt̄natim ꝑ octauam ⁊ ei quod fit ex a bis in b ⁊ c in se. Igit̄ a b in se tantus est q̃tus a quater in b cū differētia c in se. quod intenditur.

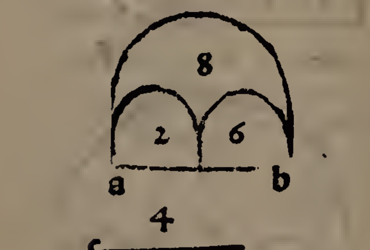


¶ Qd fit ex minore diuidētium in se cum eo qd fit ex toto in corꝫ differentiam tm̄ est 18
q̃tum quod ꝓuenit ex maiore corūdem per se multiplicato.

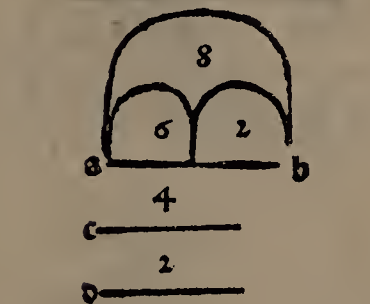
¶ Sit a numerus diuisus in b maius ⁊ c minus: sitqꝫ d differentia b ad c. dico quod fit ex c in se: cum eo quod fit ex a in d: tm̄ esse q̃tum quod fit ex b in se. Nam per decimam quod fit ex a in d: equat̄ ei qd fit ex b in d ⁊ c in d. Sit itaqꝫ illd e. et quia b diuisum est in c ⁊ d differentiam: per 14 quod fit ex b in d alterꝫ diuidentium: equum est ei quod fit ex d in se ⁊ in c. et cum per octauam c in d etiam equet̄ d in c: erit igit̄ a in d equum ip̄is d in se ⁊ bis d in c simul. quibus si addas c in se quod sit f: totum quod ꝓuenit ex a in d ⁊ c in se scꝫ e ⁊ f equabit̄ d in se / c in se / et bis d in c. at b in se (cum ip̄m diuisum sit in d ⁊ c aut equale) per decimāquintā tm̄ etiā est q̃tū d in se c in se: ⁊ bis d in c. scꝫ q̃tum fit ex ductu vtriusqꝫ partium in se: ⁊ vnius in alteram bis. Est igit̄ quod fit ex a in d toto scꝫ in differentiam: cum c minore parte in se: q̃tum quod fit ex b maiori parte in se multiplicata. quod intendit propositio.



¶ Si numerus per duo equalia duoqꝫ inequalia secetur: qd ex ductu vnius equaliū 19
in se producitur tm̄ est: q̃tum qd fit ex ductu vnius inequalium in reliquū cum eo qd
fit ex differentia in differentiam.

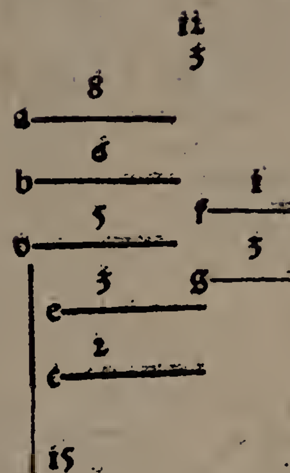


¶ Priusq̄ veniamus ad demonstrationem: notatu dignum arbitror ꝙ quādo aliqs numerus vt a b in duo equalia pariter ⁊ in duo inequalia vt in a minus ⁊ b maius diuidit̄: illa duo inequalia ad vnū equalium quod totius medietas est: eandem atqꝫ cōem habere differentiam. nam cum illorū duorum inequalium simul iunctorꝫ illud equale sit medietas: illa ab eo equidistare per secūdaꝫ partem secūde huius necesse est: quare ad ip̄m cōem habebunt differentiam. Hic fit etiā vt differētia vnius inequaliū ad reliquum: dupla sit ad differentiam cōem ipsius equalis ad ipsa. Nam cum ipsa inequalia vt a ⁊ b extrema sint et ipsum equale medium: per octauam conceptionem differentia ipsorꝫ constituta est ex differentiis eorum ad ip̄m medium. Sed hec statim nota sunt. Nos ergo ad propositi demōstratiōem cōuertamus. Sit a b nūerus diuisus in a maiorem portionem ⁊ b minorem: sitqꝫ c vna eius medietas: et d sit differētia cōmunis c ad a et ad b. Nam vt ostēsum est c ad vtrunqꝫ eandē communēqꝫ habebit differentiā. Dico ꝙ fit ex c in se tm̄ esse quantū qd fit ex a in b cum eo qd ex d in se. qr enī c diuisum ē in d et b. ideo per decimāquintā qd fit ex c in se equū ē ei qd fit ex d in se et b in se et b in d bis. et qr a maior portio est totū et eius partes b et differētia dupla ad d. ergo per decimāquartā a in b tantū est quantū qd fit ex b in se et b bis in d. adde igitur ei qd fit ex a in b numerū qui fit ex d in se: ⁊ tunc totū qd fit ex a in b et d in se equabit̄ ei quod fit ex d in se b in se et b in d bis: cui demonstratum est equari



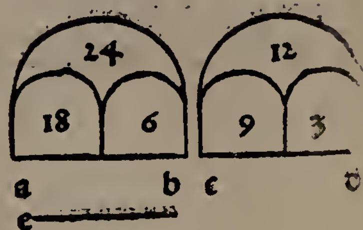
c in se.constat igitur qđ fit ex ductu vnius equaliū in se tantū esse q̄tum qđ ex vno inequaliū in reliquū cum eo qđ fit ex differentia in differentiā.

20 **Si numerus per duas quaslibet diuisiones diuidatur: qđ fit ex ductu maximi diuidentiū in minimū cum eo qđ fit ex differētia ipsius maximi ad alterū mediorū in differentiam eiusdem ad minimū tantum est q̄tum qđ fit ex ductu duorum mediorū vnius in alterum.**



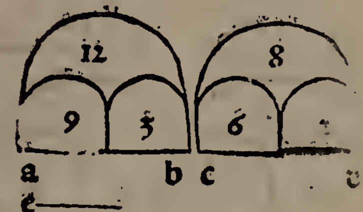
Ut in precedēti id ante animaduertere licet ꝙ cū quilibet numerus duabus hoc pacto diuisionibꝰ secatur vt a vna diuisione in b ⁊ c et scđa in d e.quorū b sit maximus et c minimus ⁊ d mediorū maior et e minor que differētia primi ad secundū eandē esse tertij ad quartū ipsis sic ordinatis. Nam qꝛ d e equales sunt circūpositis b c:ab illis per secundā partē tertie equidistāt.quare q̄ differētia b ad d que sit f:eadē erit e ad c.et etiam que differētia b ad e que sit g:eadē erit d ad c. Nam per octauā conceptionem differētia extremorū b e constituitur ex differētiis b ad d et d ad e.⁊ differētia d ad c extremorū per idē constituitur ex differētiis d ad e ⁊ e ad c. Sed differētia d ad e est vtriꝗ cōmunis:et differētia e ad c probata est equalis differētie b ad d. erunt igitur differētie b ad e ⁊ d ad c ex equalibus quidem constitute adinuicem equales. Esto ergo a numerus eo qui positus est modo diuisus et differentie vt posite sunt assignate.dico ergo qđ fit ex ductu b maximi diuidentiū in c minimū cū eo qđ fit ex f in g:equale esse ei qđ fit ex d in e vniusvidelȝ mediorū in reliquū. qđ enī fit ex ductu d in e per nonā adiuuāte octaua tm̄ est q̄tum qđ fit ex d in c et in f. Nam e diuisum est in c et dīam f. Sed qđ fit ex d in c et f per octauā equū est ei qđ fit ex c et f in d.et qđ fit ex f in d equaꝉ per nonam ei qđ fit ex f in c ⁊ g.at qđ fit ex f in c tm̄ est per octauā q̄tum qđ ex c in f.ꝙ aūt ex c in d ⁊ in f tm̄ est per nonam q̄tum qđ ex c in b.constat igitur qđ fit ex d in e tm̄ esse q̄tum qđ ex c in b cū eo qđ fit ex f in g ⁊ propositum.

21 **Si quota pars totus totius tota pars detractus detracti: erit residuus residui tota pars quota totus totius.**



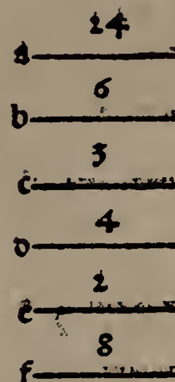
Sit a b numerus cuiꝰ detractus sit b ⁊ residuus a.sitꝗ alius numerꝰ c d cuius detractꝰ sit d et residuus c ⁊ quota pars totus c d est totius a b:tota pars sit d detractus detracti b.dico ergo totā partem c residuū esse residui a:quota pars est totus c d totius a b. capio numerū e cuiꝰ c tota pars sit quota d est b.et intelligo quattuor numeros c primū e secundū d tertiū b quartū.constat enī per quartā qꝛ c tota pars est e quota d est b:compositū c d totam partē esse cōpositi e b quota pars c est e ⁊ tota pars positus est c d ad a b.est igiꝉ a b eque multiplex ad c d vt e b ad c d et per tertiā conceptionē adinuicē equales.quare e est equalis a.⁊vt c ad e:ita quoꝗ c ad a.sed c ad e est vt detracti ad detractū ⁊ totius ad totum.est igitur c ad a residuus ad residuū vt totus ad totum et quota pars totus totius quod est propositum.

22 **Si quote partes totus totius tote partes fuerit detractus detracti:erit residuus residui tote partes quote totus totius.**



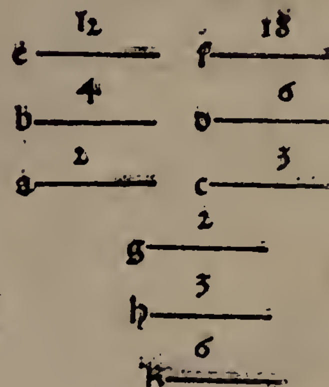
Sit a b numerus cuius detractus sit b et residuus a. ⁊ c d alius numerus cuius detractus sit d et residuus c ⁊ quote partes totus c d est totius a b:tote sit detractꝰ d detracti b. Dico ergo c totas p̄tes esse a quote c d est ipsius a b. Pone numerū e cuius c tote partes sint quote d est b ⁊ argumētare penitus eodē modo per quintam quomodo in precedenti argumētatus es per quartā.

23 **Omnis pars partis: est pars totius denominata a numero qui fit ex ductu duorū numerorū vnius in alterū partes illas denominantiū.**

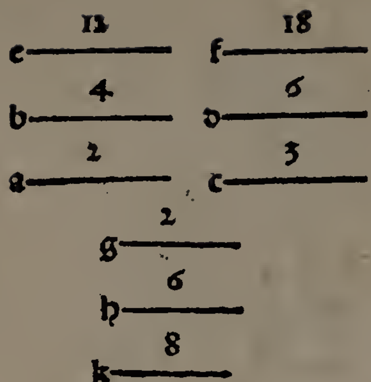


Sit a totus numerus:b eius pars et c pars b ⁊ numerꝰ denominās b in a sit d et denominās c in b sit e.sitꝗ f numerus qui fit ex ductu d in e.Dico ergo c denomīari in a ab f numero scȝ qui fit ex ductu duorum denominantiū vnius in alterum. Diuido enim f in partes equales c:⁊ similiter a in partes equales b.et qꝛ quoties b est in a:toties e est in f. est enim d denoīator vtriusꝗ cōmunis per hypothesim cum b secundū ipsum numereꝉ in a:et c secundū eundem numereꝉ in f.Ideo quot partes numero habet a ad b:tot habet f ad e.at qꝛ c numerat b secundū e cum ex hypothesi e sit denominās quoties c in b.numerabit igitur c primā partem a equalē ipsi b per primā partē f equalē ipsi e.⁊ eadē ratione secundā per secūdam ⁊ tertiā per tertiam.et ita de ceteris si plures sunt.quare c per decimā numerabit a secundū f.per diffinitionē igitur denominabitur quoties c in a secundū f atꝗ f erit ipsum denominans.est itaꝗ c pars partis denoīata pars totius a ab f numero quidē qui fit ex ductu duorū numerorum illas partes denominantiū vnius in alterum quod intenditur.

24 **Si fuerit primus secūdi tota pars quota tertius quarti:itēꝗ secūdus quinti quota pars quartus sexti: erit primus quinti tota pars quota tertius sexti.**



Sint sex numeri:a primus:b secundus:c tertius:d quartus:e quintus:f sextus. sitꝗ a tota pars b quota c est d ⁊ b tota pars e quota d fuerit f. dico igitur a totā partem esse e quota pars c est ipsius f. sit enī g denominās quoties a in b et h quoties b in e.cum a sit pars b ⁊ b pars e. ducaꝉꝗ g in h ⁊ proueniat 12.qꝛ igitur a est pars b partis scȝ ipiꝰ e per precedentē a denominatur pars e a numero 12 qui fit ex ductu g in h numerorū illas partes denominantiū vnius in alterum. at numerus h denominās b in e est etiam numerus denominās d in f ⁊ g denominās a in b etiam denominat c in d.denoīabitur igitur per eandem precedentem c in f ab eodem numero 12 qui fit ex ductu g in h denominantiū illas



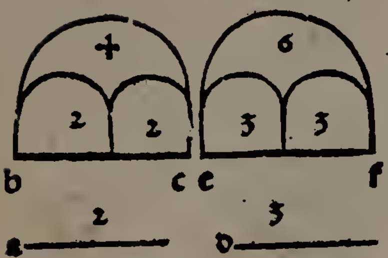
partes quare quota pars est a primus e quinti tota pars est c tertius f sexti vtpote que ab eodem nu= mero lz denominatur: quod est propositum.

Si primus in secundo quoties quartus in sexto: itemq tertius in quarto quoties scds in quinto: necesse est toties esse primũ in quinto quoties fuerit tertius in sexto. 25

Sint vt prius sex numeri: a primus: b secũdus: c tertius: d quartus: e quintus: f sextus. sitq a tota pars b quota d est f et c tota pars d quota b est ipsius e. dico a totam partem esse e quota c est f. hec pe nitus vt precedens demonstratur.

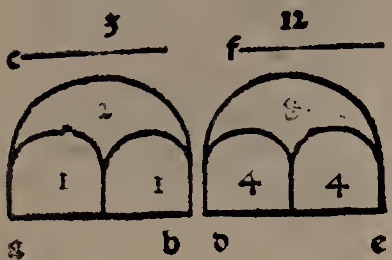
Si fuerit primus tota pars scdi quota tertius quarti: itemq primus quinti quota tertius sexti erit primus tota pars secundi et quinti quota tertius quarti z sexti. 26

Sint sex numeri: a primus: b secũdus: c tertius: d quartus: e quintus: f sextus. sitq primus in scdo vt tertius in quarto et primus in quinto vt ternus in sexto. dico a primũ esse totã partem b e secundi et quīti quota c tertius est d f quarti z sexti. qz per hypothesim primus in secũdo vt tertius in quarto sit ergo g numerus denominãs quoties a in b et c in d. z qz etiam per eandem hypothesim primus in quinto vt tertius in sexto. sit ergo h numerus denominãs vtriusq scz quoties a in e z c in f. sitq ꝯpo= situm ex g h numerus lz. tunc sic: qd fit ex ductu a in g et h: tantũ est ꝗtum b z e. et per nonam quod fit ex a in g z h: tantũ est ꝗtum qd ex a in lz compositũ ex ipsis. Similiter quod fit ex c in g et h: tantũ est ꝗtum d z f. et ꝗtum qd fit ex c in lz. igitur a primus tota pars est b e secundi et quinti quota c tertius d f quarti et sexti: vt qui numerẽtur in illis ꝯm eundem numerũ lz: quod vult propositio.



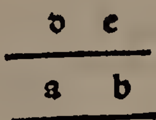
Si fuerit primus secundi tota pars quota tertius quarti primis quidẽ minoribus erit primus tertij tota pars aut partes quota pars aut partes secundus quarti. 27

Sit a primus numerus: b c secundus: et d tertius: e f quartus: a z b c simul existẽtibus minoribus et quota pars a est b c tota pars d sit e f. dico igitur quota pars aut partes b c fuerit e f totam partẽ aut partes numerũ a esse d. Diuido enĩ b c in partes suas equales a que sint b et c. item diuido e f in partes suas equales d. et qz e f est eque mltiplex ad d vt b c ad a ex hypothesi: ideo tot partes numero erunt ipsius e f quot posite sunt b c. Sint igitur ille e z f. cum igitur b prima pars b c sit equalis a z e prima pars ipsius e f sit equalis d quota pars aut partes b erit e tota pars aut partes a est d. et ita de parte c respectu partis f et reliquis partibus vnius ad reliquas partes alterius si plures essent. Jn= tellige igitur b esse primũ numerũ: e secundum: c tertium: f quartũ. et si b est partes e argumẽtoꝛ per quintã: qz primus b probatus est tote partes e secũdi quote ꝑtes est c tertius f quarti. ergo b c prim⁹ et tertius tote partes sunt e f secundi z quarti quote partes b primus est e secũdi. at a ad d monstrat⁹ est tote partes quote b est e. igitur et quote b c secundus est e f quarti. et si b esset pars e omnino consi= mili modo per quartã vt nunc quoq factum est per quĩtam elicerem argumentũ. Manifestũ itaq est si primus in secundo vt tertius in quarto primis existentibus minoribus: primum totam partem aut partes esse tertij quota pars aut partes secundus ẽ quarti.



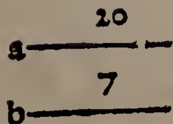
Si primus tote partes secundi quote tertius quarti primo z secundo minoribus erit primus tota pars aut partes tertij quota ꝑs aut partes secundus quarti. 28

Sint quattuoꝛ numeri: a b primus: c secundus: d e tertius: et f quartus. quoꝛum a b z c duo primi duobus reliquis sint minoꝛes: et sit a b tote partes c: quote d e est f. dico a b totam partẽ vel partes eẽ d e quota pars vel partes c est f. diuido enĩ a b in suas partes ad c que sint a z b et similiter d e ĩ suas ad f que sint d et e. cum igitur per hypothesim a b tot partes sit c quot partes d e est f: tot erunt ꝑtes numero a b diuisi quot z d e. et a prima pars a b tota erit c sui totius quota d prima pars d e est sui to tius f. quare per precedentẽ a prima pars a b ad d primaz partem d e tota pars aut partes quota aut quote c ad f. et similiter b secunda pars primi ad e secũdam partem tertij tota pars aut partes quota vel quote c ad f. sicq dereliquis partibus primi ad reliquas tertij si plures sint partes. At si a ad d sit pars facio a primum numerũ: d secundum: b tertium: z e quartum. et argumentoꝛ per quartam: quia a tota pars est d quota b est e. ergo a b ad d e tota pars quota a ad d. sed a ad d mõstratus est tota ꝑs quota c ad f. ergo a b primus ad d e tertium tota pars quota c ad f secundus ad quartum. Quod si a ad d sit partes penitus consimili modo per quĩtam argumentabere quomodo nunc per quartam de parte constat esse argumentatũ. Planum itaq est solidum esse propositum. Et si contingeret duos primos numeros duobus vltimis esse maioꝛes: conuerso modo concludẽdum esset tertium primi to= tam partem aut partes quota quartus secundi. quod facile monstrari potest oꝛdine permutato con= stituendo scz duos vltimos prioꝛes et primum z secundũ posterioꝛes.

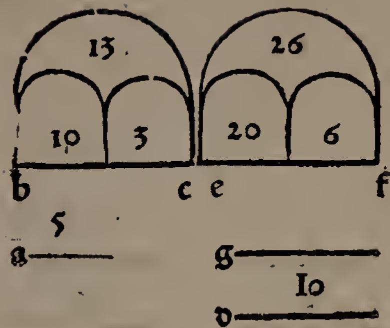


Omnis numerus minoꝛ aut maioꝛis pars est: aut eo ab maioꝛe quoties potest de= tracto relinquetur ipsius aut pars aut partes 29

Sint a b duo numeri a maioꝛ et b minoꝛ. dico b esse partem a vel eo detracto quoties poterit ab a remanere ipsius b aut partem aut partes. si enim b minoꝛ numerat a maioꝛem per diffinitionẽ b est pars a. si secus autem b non metitur a. substracto igitur b quoties poterit ab a remanebit minoꝛ b. Nam si nichil remaneret numeraret a secundũ numerum denominantẽ quoties substraheretur. quo ties enim aliquis numerus ab aliquo substrahi potest: toties in ipso numerabilis est per sextã peti= tionem qui si remanet minoꝛ b per primam propositionem est ipsius b aut pars aut partes: quod est propositum.



30 ¶Si quote partes primus secundi tote tertius quarti primis itidẽ semꝑ minoribus: quoties erit primus in secũdo toties tertius in quarto. et quota pars vel partes ꝑmi superunt in secũdo: tota pars aut partes tertij superunt in quarto.



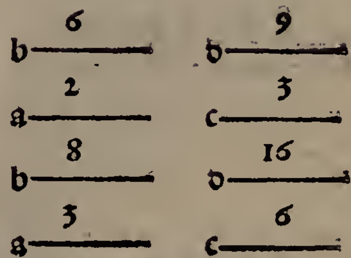
¶Sit a primus numerus/secũdus b c/tertius d/et quartus e f/et primi a et b c miores: sitqꝫ a ꝑmus tot et tote partes b c secũdi quot et quote ꝑtes d tertius est e f quarti. Dico quoties a est in b c: toties d esse in e f. et quota pars vel partes a primi supsunt in b c secũdo totam ꝑtẽ vł ꝑtes d tertij remanere in e f q̃rto. substraho enĩ a primũ a scđo b c q̃ties possum: sitqꝫ totus substractus b ⁊ residuus c: sitqꝫ d toties ĩ g: q̃ties a ĩ b. quo ꝗdẽ ita posito q: a tote ꝑtes ẽ b c q̃te d ẽ e f: ergo ꝑ vicesimãoctauã a tota ps vel ꝑtes ẽ d: q̃ta ps vel ꝑtes b c ẽ e f. Rursus ĩtelligo a ꝑmũ numerũ. b scđm. d tertiũ. g quartũ: ⁊ ꝯsiłr argumẽtor ꝑ vicesimãseptimã. q: a tota ps est b q̃ta d est g ꝑ hypothesim: ergo ꝑ vicesimãseptimã q̃ta ps vel ꝑtes b ẽ g: tota ps vel ꝑtes a ẽ d. at a ostẽsus est tota ps vel ꝑtes d q̃ta ps vel ꝑtes b c est e f: igr̃ quota ps vel ꝑtes ẽ b c ad e f: tota ps vł ꝑtes ẽ b ad g. at q: q̃t ꝑtes a ẽ b c: tot ꝑtes d ẽ e f. et quot ꝑtes a ẽ b: tot ꝑtes d ẽ g. nã b ⁊ g eq̃ multiplices: et a ẽ pauciores tote ꝑtes b ꝙ totius b c: igit̃ ⁊ d pauciores tote ꝑtes ẽ g ꝙ e f. substrahat̃ igit̃ g ab e f: sitqꝫ detractus e ⁊ residuus f: ⁊ ꝯstabit primũ ꝓpõnis ꝓpositũ. scꝫ q̃ties a in b c: toties d eẽ in e f cũ e sit eq̃lis g. ex hoc etiã manifestũ est b totã ꝑtẽ vel ꝑtes esse ẽ ꝗ̃ã e ⁊ g equant̃: detracti scꝫ ad detractũ q̃ta pars vel ꝑtes ẽ totus b c ad e f totũ. si aũt nũerus b ipiꝰ e tota ps fuerit: ꝗ ꝑ vicesimãꝑmã erit c residuus residui f tota ps q̃ta totꝰ totius. si aũt tote ꝑtes: erit ꝑ vicesimãscđaꝫ c residuꝰ tote ꝑtes residui f: q̃te b c totus e f totiꝰ. sꝫ esto ꝗ vt b tota ps sit e q̃ta ps totus b c: ẽ totiꝰ e f. Intelligo c ꝑmũ. f scđm. b c tertiũ. et e f quartũ: ⁊ argumẽtor ꝑ vicesimãseptimã. q̃a quota ps c ẽ f: tota ps b c ẽ e f vt mõstratũ est: ergo q̃ta ps vel ꝑtes c ẽ ad b f: tota ps vel ꝑtes f est ad e f. et si b eẽt ꝑtes e ꝯsiłr argumẽtare ꝑ vicesimãoctauã ⁊ ꝯclude iteꝝ ꝑ eã c totã ꝑtem vel ꝑtes eẽ totius b c: quota pars vel partes f est totius e f. et hoc est totum propositum.

31 ¶Si toties dempto primo de secundo quoties tertio de quarto tota pars vel partes primi relinquãtur in secundo quota aut quote tertij in quarto: primũ totas eẽ partes secundi quotas tertium quarti necesse est.

¶Hec est ꝯuersa precedẽtis que vt ꝑcedẽtes duobus primis nũeris minoribus intelligat̃. sit igitur a vt prius ꝑmus numerus/b c secũdus/d tertius/et e f quartꝰ: et sint duo primi miores ⁊ toties demat̃ primus a secũdo sitqꝫ dẽptus b: quoties tertiꝰ a quarto qui dẽptus sit e et sit vt q̃ta pars vel ꝑtes ꝑmi relinquũtur in scđo tota pars vel ꝑtes tertij relinquantur in quarto: sitqꝫ c relicta ps vel ꝑtes in scđo et f in quarto. Dico ergo a primũ totas eẽ partes b c secũdi quote d tertius est e f quarti. Capio g qui sit tote ꝑtes e f quote ꝑtes a est b c ⁊ ꝑ precedentem quoties a est in b c: toties g erit in e f. et quota ps aut ꝑtes a supsunt in b c: tota ps aut ꝑtes g superũt ĩ e f. At toties positus est d eẽ in e f: q̃ties a est in b c. et totã ꝑtem vel ꝑtes d supesse in e f: quota ps vel ꝑtes a supsunt in b c: igitur g ⁊ d adiuicem sunt equales. quote igitur partes a est b c: tote d est e f. quod est propositum.

¶Primi elementorum Arithmetices Jordani finis.

p Roportio est duaꝝ quãtitatum eiusdem generis vnius ad alteram certa in quãtitate relatio. ¶Numeri ad numerũ dicitur ꝓportio minoris ꝗdẽ ad maiorem in eo ꝙ pars est vel partes: maioris ꝟo ad minorem ꝺm ꝙ eum cõtinet et eius partem aut partes. ¶Proportionalitas est siĩtudo ꝓportionũ. ¶Continua ꝓportionalitas est qñ ꝯnectũtur nõ dissociatis mediis. hec aũt ad minus iter tres coalescit terios: cũ saltem vnũ sumẽdum sit mediũ. Incõtinua ꝟo est in qua intercedit mediorũ interruptio. Et hec ad mimum quattuor exigit terios ꝓpter alterius medij sumptionem. ¶Quãdo fuerit tres numeri ꝯtinue ꝓportionales: dicetur primi ad tertium proportio primi ad secũdum duplicata et ad quartum triplicata. ¶Cum aũt cõtinuate fuerint vel eedem vel diuerse ꝓportiones: dicetur primi ad vltimum ꝓportio ex oibus composita. Denoiatio dicitur ꝓportiõis minoris quidẽ ad maiorem pars vel partes quota vel quote illiꝰ fuerint: maioris ꝟo ad minorem numerus ꝺm quem eũ cõtinet et pars vel partes minoris que in maiore superfluunt. Similes siue vna alij eadem: dicũtur ꝓportiones que eandem recipiunt denoiationem. maior ꝟo que maiorem: et minor que minorem.



1 ¶Si fuerit proportio primi ad scđm que tertij ad quartum: erit ecõuerso que secũdi ad primum eadem quarti ad tertium.

¶Hec demõstrat ꝯuersam ꝓportionalitatem: que ab euclide quĩto geometrie ponit̃ pria spẽs ꝓportionalitatum. et est quoties cõcludimus ꝯñs ad añcedens vt ꝯñs ad añs: ꝙ añs ad ꝯñs sese habuerit vt añcedens ad ꝯñs. añcedẽs enĩ est primũ ꝓportionis extremum: ꝯñs ꝟo scđm. Sint itaqꝫ quattuor numeri: a primus/b secundus/c tertius/d quartus: sitqꝫ vt que proportio a ad b: eadem sit c ad d. dico ecõuerso que proportio b ad a: eãdeꝫ esse d ad c. Nam cũ ea sit ꝓportio c ad d que a ad b ꝑ diffinitionẽ eandem habebũt denomĩationem. si itaqꝫ a sit minor b ex diffinitiõibus tota pars vel partes erit a ad

b:quota pars vel partes c ad d. Si aũt sit a ad b tota pars quota c ad d: vt in prima figuratiõe mõstratur: erit d eque multiplex ad c vt b ad a. quare que ꝓportio b multiplicis ad a: eadem erit d eque multiplicis ad c. at si a tote partes sit b quote c est d: per tricesimã igitur primi b toties cõtinebit ipsũ a et totã eius partẽ vel partes: quoties d ↄtinet c et quotã eius partem vel partes. q̃re similis erit denoĩatio b ad a que d ad c: et que ꝓportio b ad a eadem et d ad c. q̄ si a numerus eẽt maior b: ↄsimili argumẽto pateat propositum ponẽdo b primum numerum / a scd̃m / d tertium / c quartum.

b 2	d 3
a 6	c 9
b 6	d 9
a 2	c 3

Si fuerit primus ad scd̃m sicut tertius ad quartum: fueritq̃ primus maior secũdo erit tertius maior quarto. 2

Sint vt prius quattuor numeri: a primus / b secũdus / c tertius / d quartus: sitq̃ a maior b. dico etiã c esse maiorem d. Nam per precedentem q̄ que ꝓportio a ad b ea est c ad d: ideo ↄ ↄtra que ꝓportio b ad a eadem erit d ad c. at b ponit̃ minor a: igit̃ erit per primam primi b pars aut partes a. quare et d tota ps vel ptes c. atq̃ d mĩor c qđ intẽdit̃. Potes ↄ directe ꝓbare q̄ a ẽ maior b aliq̃ties ↄtinet b vel aliquoties et ptẽ aut partes. et cũ c eandem ꝓportionẽ hẽat ad d: ergo toties c cõtinebit d aut toties et partem aut partes. q̃re c maior est d. qđ est propositum. Et cõsilr̃ ꝓbare possis q̄ facillime si pmus minor scđo fuerit: tertiũ quarto eẽ minorem. Nã si primus sit mĩor scđo per primam primi erit pars vel partes scđi. et cũ tertius ad quartum eãdem habeat proportiõem: tota ps aut partes erit tertius quarti: quare minor quarto. et si primus eẽt equalis scđo ↄsilr̃ ꝓbabis tertium esse equalem quarto.

a 2	b 6	c 3	d 9
a 3	b 8	c 6	d 16
a 6	b 2	c 9	d 3

Si fuerit primus ad scd̃m sicut tertius ad quartum: erit ꝑmutatim sicut primus ad tertium: ita secundus ad quartum. 3

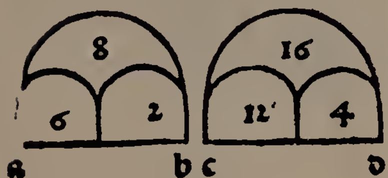
Hec demonstrat ꝑmutatam proportiõalitatem: que est quoties cõcludimus vt añs ad añs: ita ↄñs ad ↄñs: q̄ vt añcedens ad ↄñs: ita añs ad ↄñs sese habuerat. Sint ergo quattuor numeri: a primus / b secũdus / c tertius / d quartus: sitq̃ similis ꝓportio a ad b et c ad d. dico silr̃em esse proportionem a ad c et b ad d. Nam primo si a sit minor ↄ pars b: q̄ similis est proportio a ad b et c ad d: hinc euenit vt q̃ta pars a sit b tota pars c sit d. ergo per vicesimãseptimã primi: quota pars vel partes b est ad d: tota ps vel partes erit a ad c. erit itaq̃ eadem ꝓportio a primi ad c tertium: et b secundi ad d quartum. Scđo si a sit ꝑtes b vt in scđa figuratione: idem ↄ similiter argumẽtabere per vicesimãoctauã primi. Tertio si a sit maior b: facto b primo / a secũdo / d tertio / c quarto: auxilio prime huius idẽ efficies q̄ facillime.

a 3	b 9	c 2	d 6

Si fuerit primus ad scd̃m sicut tertius ad quartum fueritq̃ primus maior tertio: erit quoq̃ secundus maior quarto. 4

Sit a primus numerus: b secundus / c tertius / d quartus: ↄ similis proportio a ad b et c ad d: sitq̃ a maior c. dico b eẽ maiorem d. Nam q̄ vt a ad b: ita c ad d. permutatim igitur per precedentem vt a ad c: ita b ad d. sed a maior est c: ergo et b maior d per secũdam. quod est propositum.

Si sicut totus ad totum fuerit detractus ad detractum: erit residuus ad residuum sicut totus ad totum. 5



Sit a b totus numerus: a detractus / et b residuus: et c d alter totus c ab eo detractus ↄ d residuus sitq̃ similis proportio a b ad c d: et a ad c: dico b ad d proportionem esse que est a b ad c d. Nam si a b fuerit minor c d: erit per vicesimamprimam ↄ vicesimamsecũdam primi sub disiũctione q̃ta pars aut partes fuerit a b ad c d: vt tota pars vel partes sit b ad d residui ad residuum. quare q̄ ꝓportio totius ad totum: ea erit ↄ residui ad residuum. at si a b sit maior c d: ecõuerso quota pars vel partes c d ad a b: tota pars vel partes erit d ad b. quare iterũ per primam huius cõcluditur propositum.

Si fuerit primus ad scd̃m sicut tertius ad quartũ: erit primus ↄ secundus ad scd̃m sicut tertius et quartus ad quartum. 6

a 2	b 6	c 3	d 9
a 4	b 3	c 8	d 6

In hac demõstratur coniũcta ꝓportionalitas: que est quoties concludimus cõiũctum antecedẽtis et ↄsequentis ad ↄsequẽs vt ↄiũctum añtis ↄ ↄñtis ad ↄsequens: q̄ añcedens ad cõsequens se habeat vt antecedẽs ad consequens. Sit vt a primus numerus se habet ad b secũdum: ita c tertius se hẽat ad d quartum. Dico ergo vt a b ad b: ita et c d ad d. Nã quia est similis ꝓportio a ad b et c ad d: si a ergo sit minor b: erit vt quota pars vel partes a est b: tota pars vel partes c sit d. ergo semel b est in a b: et semel d in c d. et in a b superat a tota pars vel partes b: quota pars vel partes c est ipsius d exuperans in c d. quare que proportio b ad a b: eadem erit d ad c d. per primã ergo huius que proportio a b ad b: eadem erit c d ad d. qđ est propositum quo ad hoc. At scđo si a ponatur maior b vt in secũda figuratiõe per primam quota pars vel partes b erit ad a: tota pars vel partes d est ad c. ergo b semel se suꝑaddẽs in a b: tota pars vel partes erit a b: quota pars vel partes d erit c d se itidem semel suꝑaddens in c d. quare eadem proportio b ad a b et d ad c d. per primam ergo huius que ꝓportio a b ad b: eadem erit c d ad d. quod iterũ est propositum.

Si vnus numerus duos multiplicet: erit ꝓductorũ ↄ multiplicatorũ eadẽ ꝓportio. vnde manifestũ est multipliciũ d̃rias submultipliciũ differentiis eẽ eque multiplices. 7

b 5	c 4	d 10	e 8
	a 2	f 1	g 2

Multiplicet a numerum b ↄ proueniat d: et idem a multiplicet c ↄ proueniat e. dico que proportio b ad c / multiplicati scꝫ ad multiplicatum eãdem esse d ad e ꝓducti scꝫ ad ꝓductum. Nam cũ b sit in d ꝑm a: et c in e etiam ꝑm a: quoties b est in d toties c est in e. ergo q̄ proportio b ad d ea erit c ad e. ꝑmutatim igitur per tertiam q̄ proportio b ad c ea erit d ad e. qđ est propositum quo ad hoc: ↄ correlariũ

hoc intēdit.si g sit differētia d ad e: et f differētia b ad c. q̄ q̄r d et e sunt sumpti eque mltiplices ad b et c: proportionem g ad f esse eque multiplicem vt d ad b. et sint b d duobus reliquis maiores. quia p̄ presentem ea est proportio d ad e: que b ad c. ergo permutatim per tertiam q̄ proportio d ad b totius ad totum: ea est e ad c detracti ad detractum. ergo per quintam g ad f residuus ad residuum vt d ad b totius ad totum. qđ est propositum.

8 ¶ Si duo nūeri eūdem multiplicent: erit multiplicantiū ac ꝓductoꝝ eadem ꝓportio.
¶ Ut si in figuratione precedētis b multiplicet a: et ꝓueniat d. et c itidem multiplicet a: ⁊ ꝓueniat e. Dico q̄ proportio b ad c multiplicātis ad multiplicantem: eādem esse c ad e producti ad productum. Nam per octauam primi idem ꝓuenit multiplicando a p̄ b ⁊ b per a scʒ d. et siṁiter idem ꝓuenit multiplicando a per c et c per a scʒ e. sed per precedētem b ⁊ c multiplicatis per a: eadem est ꝓportio b ad c ⁊ d ad e. ergo ⁊ multiplicātibus b ⁊ c a: eadē erit proportio b ad c ⁊ d ad e. qđ est propositum.

c 9
b 3
a 6

9 ¶ Si duo nūeri ad tertiū ꝯparent: maioris ad ipm maior erit ꝓportio ⁊ mīoris mīor: ipius xo ad maiorem ꝓportio minor/ad minorē maior. vñ manifestū est si duo nūeri ad eūdem cōparati: eādem seruent ꝓportiōis habitudinē: illis vnū/eūdēq̧ eē nūerū.
¶ Comparētur a b ad tertium c sitq̧ a maior b: dico ipsius a ad c maiorem eē ꝓportionem q̄ b ad c: dico etiā c ad a minorem esse proportionem q̄ c ad b. Primū patet et sit primo c tertius vtroq̧ a et b maior. qm̄ c est maior a ⁊ maior b: erit a pars vel partes c p̄ primam primi: et per eādem b eiusdē erit pars vel partes. et cū a positus sit maior b ipe erit plures ptes c q̄ b. quare maior proportio a ad c q̄ b ad c. Sit scđo c tertius vtroq̧ a ⁊ b minor: si a pluries ꝯtinebit c q̄ b ipm c ꝯtineat: cōstat ꝓpositū. Et si a ⁊ b equaliter ꝯtinebūt c: q̄r a maior b plures partes ipius vltra ꝯtinebit a q̄ ꝯtineat ipe b. q̄re idem cōcluditur a scʒ ad c maiorem eē proportionem q̄ b ad c. Sit tertio c tertius minor a ⁊ maior b: quia denoīatio proportiōis a ad c fit a toto multiplice aut a toto ⁊ parte aut partibus/et denomīatio proportiōis b ad c est a parte aut partibus: ꝯstat ⁊ hoc mō maiorem eē proportionem a ad c q̄ b ad c. et cū non possit c tertius esse maior a ⁊ minor b. q̄r quicūq̧ est maior maiore maior est ⁊ minore: ꝯstat prima p̄s quo ad oēs eius modos firma. Scđa pʒ: ⁊ sit p̄io c tertius maior a ⁊ b cū c sit maior a et b ⁊ a sit maior b. si c ꝯtinet pl'ies b minorē q̄ a maiorē: ꝯstat proportionē c ad b esse maiorē q̄ c ad a. et si c cōtinet b ⁊ a equalit̄: cōtinebit insuper plures partes b minoris q̄ a. quare iteꝝ idem cōcluditur. Sit scđo c vtroq̧ minor. erit itaq̧ sumptis vnitatibus totidem partes maioris quot minoris. sed maioris per conceptionem erit totideʒ partes minores: cum partes ille a maiore numero sint denoīate. quare ipsius ad maiorem iteꝝ minor proportio. Sit tertio c tertius minor a ⁊ maior b: cū sit solum pars vel partes a ⁊ excedat ipm b: maior erit ipius ad b ꝓportio q̄ ad a. et cū nō possit vt dictum est eē maior a et minor b: cōstat secūda pars quo ad oēs eius partes monstrata. Correlariū ex prima parte facile cognitum esse potest.

c 4
b 8
a 9

c 6
b 3
a 9

10 ¶ Si idem numerus ad duos cōparet̄ ad quē ipius maior ꝓportio fuerit: minorem/ et ad quem minor: maiorem esse necesse est.
¶ Hec est ꝯuersa precedētis. Sint ergo a b duo nūeri ad quos cōparetur c tertius. et sit c ad a minor proportio: et c ad b proportio maior. dico a eē maiorem: et b minorem. Nam p̄mo non erunt equales: quia c ad vtrūq̧ eēt eadem proportio. neq̧ a erit minor b. nam per primam partem precedētis: minor eēt a ad c proportio q̄ b ad c. et per scđam partem eiusdem maior c ad a proportio: ⁊ minor c ad b. qđ est ꝯtra hypothesim. relinq̄tur igitur propositum verum.

c 3
b 6
a 9

11 ¶ Si fuerit ꝓportio primi ad scđm maior q̄ tertii ad quartum: erit secūdi ad primuū proportio minor q̄ quarti ad tertium.
¶ Hanc in multiplicibus demōstrare p̄facile est: vt si sit a ad b in genere multiplici maior proportio q̄ c ad d: dicam b ad a minorem esse proportionem q̄ d ad c. capiam eni e eque multiplicem ad d: vt a ad b. q̄r ergo a ad b et e ad d eque multiplices: erit a ad b ⁊ e ad d eadem proportio. at proportio a ad b posita est maior q̄ c ad d: ergo ⁊ proportio e ad d maior est q̄ c ad d. per scđam partem igitur none maior est proportio d ad c q̄ d ad e. at q̄r eadem est proportio a ad b ⁊ e ad d. per primā igitur huius eadem erit proportio b ad a ⁊ d ad e. sed d ad c ꝓbata est maior proportione d ad e: maior igitur erit ⁊ sua equali b ad a. qđ est propositum. at q̄r demōstratio hec non eque aptanda est aliīs gn̄ibus: idcirco alia vniūsalior adhibenda est. Sit ergo a ad b maior proportio q̄ c ad d: dico b ad a minorem eē ꝓportionem q̄ d ad c. duco eni c in b et proueniat e: et idē c in a ⁊ ꝓueniat f. per septimā huius q̄ ꝓpportio a ad b: eadem erit f ad e. Rursus duco d in a ⁊ ꝓueniat g. q̄r c ⁊ d multiplicauerūt a p̄ octauam eadem erit proportio f ad g producti ad productum: q̄ c ad d multiplicātis ad multiplicantem. Est igitur f ad e proportio vt a ad b: et f ad g vt c ad d. sed proportio a ad b posita est maior proportiōe c ad d: igitur proportio f ad e maior est proportiōe eiusdē f ad g. per precedētem igitur e minor est ⁊ g maior. igitur per primam partem none huius ꝓportio e ad f minor est q̄ g ad f. sed proportio e ad f est eadē ꝓportioni b ad a: et ꝓportio g ad f eadem proportioni d ad c vt facile per primam huius cognoscere potes: igit̄ proportio b ad a scđi ad primū minor est q̄ ꝓportio d ad c quarti ad tertiū. qđ erat demōstrādū.

b 3 d 2
a 9 c 4
e 6

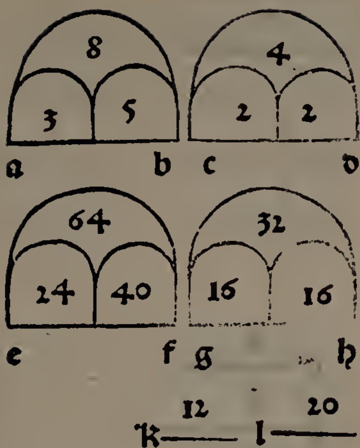
b 4 d 8
a 6 c 10

e 40
f 60
g 48

12 ¶ Si fuerit primi ad scđm proportio maior q̄ tertii ad quartum: erit primi ad tertiū maior q̄ secundi ad quartum.
¶ Sint vt prius q̄ttuor numeri: a primus. b scđs. c tertius. d quartus: et sit a ad b ꝓportio maior q̄ c ad d. dico maiorem esse ꝓportiōem a ad c primi ad tertiū: q̄ b ad d secūdi ad quartū. duco eni a in b

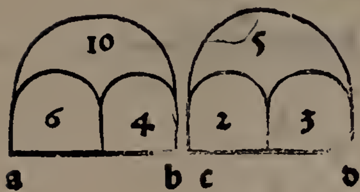
b 3 d 2
a 9 c 4
e 27 g 18
f 81 h 36
k 12

et proueniat e.⁊ a in se et proueniat f.et in d et proueniat g.et in c et ꝓueniat h.per septimam huius que proportio a ad b:ea est f ad e.et que c ad d:ea h ad g.deiñ duco b in c et ꝓueniat k:eritq̄ p octauā huius h ad k sicut f ad e.at proportio f ad e q̄ equatur ꝓportioni a ad b:est maior proportione c ad d. ergo ⁊ proportio h ad k eadē proportioni f ad e:maior est ꝓportione h ad g.cū h ad g equetur c ad d. ergo per decimam k minor est g.et q̄ f ad e vt h ad k:ꝯ per tertiam vt f ad h: ita e ad k.et q̄ g ꝓbatus est minor k:ergo per scd̄am partem none minor erit proportio e ad g q̄ e ad k.sed e ad k per octauam huius adequatur proportioni a ad c primi ad tertium:et e ad g proportioni b ad d secundi ad quartū Est igitur proportio primi ad tertium maior q̄ secundi ad quartum qd̄ proponitur.



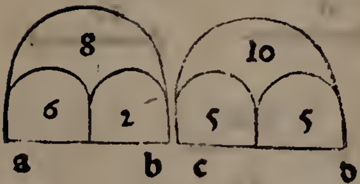
¶Si fuerit ꝓportio totius ad totum maior q̄ detracti ad detractum : erit residui ad residuum proportio maior q̄ totius ad totum. 13

¶Sit a b totum et ab eo detractus a ⁊ residuus b.sit item c d aliud totum ⁊ ab eo detractus c ⁊ residuus d.sitq̄ totius a b ad totū c d ꝓportio maior q̄ a ad c:dico b ad d residui ad residuum maiorem esse proportiōem q̄ a b ad c d totius ad totū.duco enī a b in a et in b et proueniat e f cuius detractus sit e ⁊ residuus f.et duco idē a b in c et in d et proueniat g h:cuius g sit detractus ⁊ residuus h.Item ducat a in c d et ꝓueniat k:substrahaturq̄ k ab toto g h ⁊ relinquatur l.cum enī per nonam primi qd̄ fit ex ductu alicuius numeri in oīs partes alicuius totius:equū sit ei qui fit ex ductu illius numeri in eūdē totum:totus e f equabitur ei q̄ fit ex ductu a b in seipm a b.et cū idem a b ductus in a ꝓduxerit e detractum e f.per septimā huius que ꝓportio a b ad a:eadem erit e f ad e.et eadē rōne que a b ad b: eadem e f ad f.et que a b ad c d:eadem e f ad g h.et vt c d ad c:ita g h ad g.et g h ad h:vt c d ad d.et cū duo numeri scʒ totus a b et a detractus:ducti sint in eūdem c d:et ꝓduxerit numerus a b numerū g h et a numerum k:per octauam que proportio a b ad a:eadem est g h ad k.sed et cū e ꝓducatur ex a in a b:et k ex a in c d.per septimam q̄ proportio a b ad c d:eadē erit e ad k.quare vt e f ad g h:ita ⁊ e ad k detractus ad detractum.per quintam igitur vt e f ad g h:ita f ad l residuus ad residuum.et cū c ad g sit proportio que a ad c:erit proportio e ad g minor q̄ e ad k.quare per decimam k minor est g.igitur et l qui ꝯstabit ex h et differētia k ad g:maior erit h.igitur per eādem decimam ꝓportio f ad h minorē numerum maior est q̄ ad l.at proportio f ad l ꝓbata est eadem ꝓportioni e f ad g h:quare ⁊ ꝓportiōi a b ad c d totius ad totum.Est igitur ꝓportio f ad h:q̄ est eadem ꝓportioni b ad d residui ad residuū: maior proportione a b ad c d totius ad totum.quod est propositum.



¶Si vero detracti ad detractū fuerit ꝓportio maior q̄ totius ad totum: erit residui ad residuum proportio minor q̄ totius ad totum. Ex his quoq̄ perspicuum euadit si fuerit ꝓportio residui ad residuū sicut detracti ad detractum : ꝓportionem detracti ad detractum esse tanq̄ totius ad totum. 14

¶Sit a b aliquis totus nūerus ⁊ ab eo detractus a ⁊ residuus b:et c d alter totus ⁊ ab eo detractus c et residuus d.sitq̄ a ad c maior proportio q̄ a b ad c d.dico b ad d minorem esse proportionem q̄ a b ad c d.quia enī a ad c est ꝓportio maior q̄ a b ad c d:per vndecimam huius ecōtra minor erit ꝓportio c ad a q̄ c d ad a b.cū itaq̄ maior erit ꝓportio c d ad a b totius ad totū q̄ c ad a detracti ad detractū. per precedentem igitur maior est proportio d ad b residui ad residuum q̄ c d ad a b totius ad totum. Intelligo igit d primū numerum.b scd̄m.c d tertium.et a b quartum.q̄ d ad b maior est proportio q̄ c d ad a b:per vndecimam ecōtra mīor est proportio b ad d q̄ a b ad c d.est itaq̄ notum totius ad totū maiorem esse proportionem q̄ residui ad residuum ⁊ propositum. Correlarium patet:nam si totius ad totum maior esset proportio q̄ detracti ad detractum:ergo per precedentem residui ad residuum maior erit proportio q̄ totius ad totum.q̄re multo fortius residui ad residuum maior esset proportio q̄ detracti ad detractum.quod est cōtra hypothesim.Si autem totius ad totum mīor sit proportio q̄ detracti ad detractum:ergo per presentem residui ad residuum minor erit ꝓportio q̄ totius ad totū. quare ⁊ multo fortius residui ad residuum minor erit proportio q̄ detracti ad detractum.qd̄ est iterum ꝯtra hypothesim.Cum itaq̄ ꝓportio totius ad totum neq̄ maior neq̄ minor esse possit q̄ detracti ad detractum:relinquitur eidem equalis.

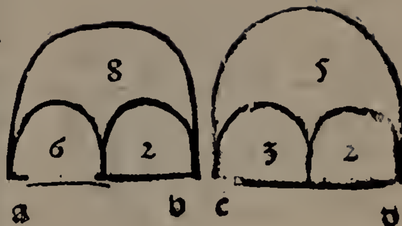


¶Si primi ad scd̄m fuerit proportio maior q̄ tertij ad quartum:erit primi ⁊ secundi ad secundum maior proportio q̄ tertij et quarti ad quartum:ad primum vero minor q̄ tertij et quarti ad tertium. 15

¶Si a ad b maior ꝓportio fuerit q̄ c ad d:dico pͥmo a b ad b maiorem eē ꝓportiōem q̄ c d ad d.scd̄o a b ad a minorem esse q̄ c d ad c.Primū patet:nā si a b ad b ⁊ c d ad d ponātur equales:vt q̄ ꝓportio a b ad b:ea sit c d ad d.ergo ꝑmutatim p tertiā huius erit ꝓportio a b ad c d:que b ad d.q̄re p quintā que proportio a b ad c d:ea erit et a ad c residui ad residuum.quare et q̄ b ad d.et cū similes sint a ad c et b ad d:ergo permutatim per tertiam que proportio a ad b ea est c ad d.quod ē ꝯtra hypothesim. Si aūt ponatur a b ad b minor et c d ad d proportio maior:cū c d ad d sit proportio maior q̄ a b ad b ergo per duodecimam huius c d ad a b maior q̄ d ad b detracti ad detractum.ergo per decimātertiā c ad a maior residui ad residuū q̄ c d ad a b.quare multo potius q̄ d ad b.cū itaq̄ c ad a sit maior q̄ d ad b:ergo per vndecimam minor est a ad c q̄ b ad d.Intelligo ergo quattuor numeros:b primum. d scd̄m.a tertiū.c quartū:quia maior est ꝓportio b ad d q̄ a ad c:ergo per duodecimā maior est b ad a q̄ d ad c ꝓportio:ergo p vndecimam minor a ad b q̄ c ad d.qd̄ est ꝯtra hypothesim.Relinquit igit ꝓportio a b ad b:cū neq̄ eq̄lis neq̄ mīor vt ꝓbatū est eē possit:maior eē ꝓportiōe c d ad d.qd̄ est pͥmū.

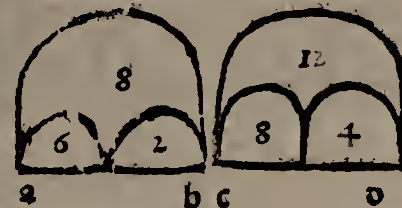
Scḋm patet:nam p immediate mōſtratum a b ad b:maior eſt ꝓportio ꝙ̄ c d ad d.ergo p duodecimam ꝓportio a b ad c d:maior ꝙ̄ b ad d detracti ad detractū.ergo p decimātertiā a ad c reſidui ad reſiduū maior proportio ꝙ̄ a b ad c d.quare iteꝝ per duodecimā a ad a b maior ꝙ̄ c ad c d.per vndecimā igiṫ a b ad a:minor ꝙ̄ c d ad c.quod eſt ſcḋm ⁊ totum propoſitum.

15 ¶ Si inequales nūeri equalibus addātur:erit ꝓpoſitoꝝ minor ꝓportio ꝙ̄ adiūctoꝝ.



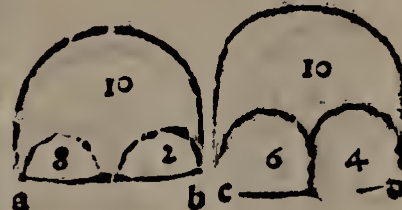
¶ Sint a c numeri inequales:b vero ⁊ d equales ⁊ cōpoſiti a b ⁊ c d:ſitq̄ a maior c.dico a ad c adiūcti ad adiūctum maiorem eſſe proportiōem ꝙ̄ a b ad c d compoſiti ad compoſitum.nam cū b ⁊ d idem ſint numerus:⁊ a ſit maior c:per nonam igitur maior eſt proportio a ad b ꝙ̄ c ad d.ergo per duodecimam maior proportio a ad c detracti ad detractū ꝙ̄ b ad d reſidui ad reſiduū.ergo maior proportio a ad c detracti ad detractum:ꝙ̄ a b ad c d totius ad totum.nam ſi a ad c:⁊ a b ad c d eadem eſſet proportio: per quintam eadem eēt a ad c:⁊ b ad d.cuius oppoſitū demōſtratum eſt.Si autē maior eēt a b ad c d proportio ꝙ̄ a ad c:ergo per decimātertiā eſſet ꝓportio b ad d reſidui ad reſiduū:maior ꝙ̄ a ad c detracti ad detractū.cuius etiā oppoſitum modo monſtratum eſt.relinquitur igitur a ad c proportio maior adiuncti ſcꝫ ad adiūctum:ꝙ̄ a b ad c d compoſiti ad compoſitum ⁊ propoſitum.

17 ¶ Si fuerit ꝓportio primi ad ſcḋm maior ꝙ̄ tertij ad quartū: fueritq̄ primus minor tertio:erit ſecundus minor quarto.



¶ Sint quattuor numeri:a primus/b ſecūdus/c tertius/d quartus:ſitq̄ a ad b proportio maior ꝙ̄ c ad d:et ſit a minor c.dico b eſſe minorem d.nam cū c ſit maior a:ergo per nonā maior eſt ꝓportio c ad b:ꝙ̄ a ad b.quare multo fortius c ad b maior eſt proportio ꝙ̄ c ad d.per decimam igitur d maior eſt b. quod eſt propoſitum.

18 ¶ Cum fuerit proportio primi ad ſcḋm maior ꝙ̄ tertij ad quartum:et compoſitum ex primo et ſecundo equale compoſito ex tertio et quarto:primum tertio maiorem eſſe neceſſe eſt.



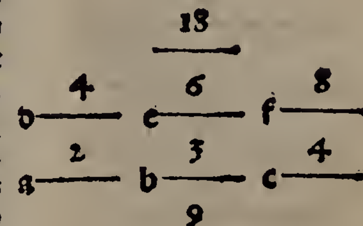
¶ Sit a ad b maior proportio ꝙ̄ c ad d:et nūerus cōpoſitus a b equalis cōpoſito c d:dico a eē maiorē c.nam primo non erit equalis:q̄r ſi a eēt equalis c:etiam b eēt equalis d per conceptiōem.alioquin ſi equalibus inequalia adderētur:tota fierent inequalia.quare equalis eēt ꝓportio a ad b: ⁊ c ad d.qḋ eſt ꝯtra hypotheſim.neq̄ erit c maior a:⁊ a minor.nam per precedentem b ſcḋs eſſet minor d quarto per conceptionem igitur a et b duo minores ſimul ſumpti minus ſunt ꝙ̄ c d duo maiores ſimul.quod iteꝝ eſt ꝯtra hypotheſim.relinquitur igitur a eē maiorem c ⁊ propoſitum.

19 ¶ Si primus fuerit maior tertio: ⁊ compoſitus ex primo ⁊ ſecundo equalis cōpoſito ex tertio ⁊ quarto:maior erit proportio primi ad ſcḋm ꝙ̄ tertij ad quartum.

¶ Hec eſt ꝯuerſa precedentis.Sit vt prius a primus nūerus maior c tertio:et cōpoſitus a b equalis cōpoſito c d.dico maiorem eē a ad b ꝓportionē ꝙ̄ c ad d.Nam q̄r a ē maior c:⁊ a b ⁊ c d equales:erit b minor d.non eni eſſe poteſt b equalis d.nam ipſis a ⁊ c inequalibus additis:tota non fierent equalia. neq̄ eſt b maior d.nam per cōceptionem qḋ fieret ex a ⁊ b duobus maioribus plus eſſet.quod eſt ꝯtra hypotheſim.et cū ſit maior c:ergo p nonam proportio a maioris ad d:maior eſt ꝙ̄ proportio c ad d.ſꝫ ⁊ cū b demōſtratus ſit minor d:per decimam igitur a ad b maior proportio ꝙ̄ a ad d.quare multo fortius ꝙ̄ c ad d.quod eſt propoſitum.

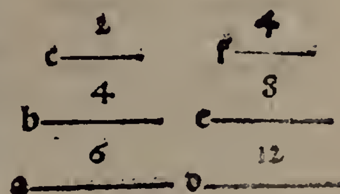
20 ¶ Si quotlibet numeroꝝ ad totidem alios fuerit vna proportio:que vnius ad vnum ea oīm ad omnes pariter acceptos erit proportio.

¶ Sint a/b/c q̄tlibet nūeri:et d/e/f totidem alij.et ſit a ad d:et b ad e:⁊ c ad f proportio vna.dico que proportio a ad d:eādē eē totius a b c ad totū d e f.nam facile ex ſcḋa huius cognoſcis tres añcedētes eē eque aut maiores aut minores aut equales ad ſuos ꝯſequētes. Si aūt ſint eq̄ miores:quota pars vel ptes erit a ad d tota ps vel ptes erit b ad e:⁊ c ad f.ergo p quartā ⁊ quintā primi ſub diſiunctione quoties oportuerit repetitas erit totus a b c tota ps vel ptes totius d e f:quota pars vel ptes a ad d. quare eadē erit ꝓportio a ad d:et totius a b c ad d e f.At ſi ſint tres añcedētes eque maiores quia q̄ ꝓportio a ad d:ea eſt b ad e ⁊ c ad f.ergo p primā hui⁹ q̄ ꝓportio d ad a:ea eſt e ad b ⁊ f ad c.q̄re q̄ta ps vel ptes d ad a:tota vel tote eſt e ad b.⁊ f ad c.per quartā igiṫ ⁊ quintā primi ſub diſiūctione q̄ties opus fuerit repetitas quota ps vel ptes eſt d ad a:tota ps vel ptes eſt d e f ad a b c.q̄re q̄ ꝓportio d ad a:eadē erit totius d e f ad totū a b c.ergo p primā huius q̄ ꝓportio a ad d:eadē totius a b c ad totum d e f.qḋ iteꝝ eſt ꝓpoſitum.Si vero ſinguli ſingulis ſint equales: ſtatim adiuuāte ꝯceptione ſi equales numeros equalibus addas totos fieri equales:idem efficies.eſt itaq̄ totum propoſitum notum.



21 ¶ Si fuerint quotlibet numeri/aliiq̄ ſm eundem numerum ꝯtinue in eadem ꝓportione ſumpti:extremoꝝ eandem eſſe proportionem neceſſe eſt.

¶ Hec declarat equā ꝓportionalitatem que eſt quoties ſumptis quotlibet numeris ad alios totidē in cōtinua ꝓportionalitate ſe hn̄tibus:cōcludimus vt illoꝝ proportio extremi ad extremum:ita hoꝝ extremi ad extremū proportiōem eſſe.quid aūt ſit cōtinua ꝓportionalitas:iam dictū eſt.et hec equa proportionalitas bifariā formari poteſt pmo directe:ordineq̄ recto.vt ſi hunc in modum dixero:ſicut a ad b:ita d ad e.et ſicut b ad c:ita e ad f.ḡ ſicut a ad c:ita d ad f ꝓ quo eque proportionalitatis modo ponitur preſens ꝓpoſitio. Scḋo vero formaṫ indirecte ꝯuerſoq̄ ordine.vt ſi dixero que ꝓportio a ad b ea eſt e ad f:et que b ad c ea d ad e.ergo que ē a ad c:ea eſt d ad f.ꝓ quo quidē eque proportiōalitatis

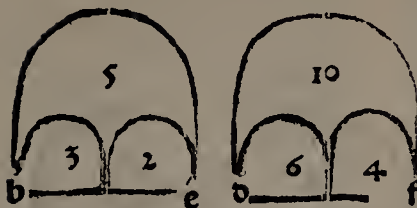


modo sequēs ponet ꝓpositio. Sint ergo a b c quotlibet numeri in cōtinua ꝓportiōalitate ⁊ directe se hn̄tes ad totidē d e f. vt sicut se hēat a ad b: ita d ad e. et sicut b ad c: ita e ad f: dico eādez eē ꝓportionem a ad c ⁊ d ad f. nā qꝛ q̄ ꝓportio a ad b: ea est d ad e. ꝑmutatim ꝑ tertiā huius q̄ proportio a ad d ea est b ad e. et qꝛ q̄ proportio b ad c ea est e ad f: igit ꝑ eādez tertiā ꝑmutatim q̄ ꝓportio b ad e: ea est c ad f. quare et que a ad d. cum itaq; que proportio a ad d ea sit c ad f: ergo ꝑmutatim per tertiam que proportio a ad c: eadem est d ad f: quod est propositum.

c 2 — f 6 — k 54
b 4 — e 9 — h 108
a 6 — d 18 — g 162

¶ Si quotlibet numeri totidem alijs indirecte proportiōales fuerint: extremi quoq; in eadem proportione proportionales erunt. 22

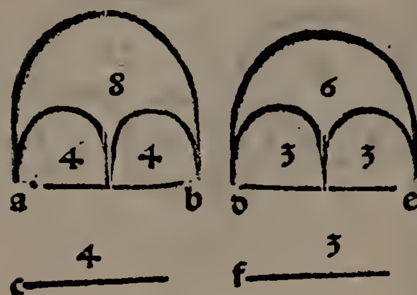
¶ Sit a ad b vt e ad f: et b ad c vt d ad e ꝯuerso ordine proportionales: dico a ad c vt d ad f. Duco enī d in e ⁊ in f: et ꝓueniāt g h: et e in f. et proueniat k. per septimā hui⁹ q̄ proportio e ad f eadem est g ad h quare ⁊ que a ad b: eadem est g ad h. et qꝛ d et e multiplicāt f: ꝑ octauā q̄ proportio d ad e: ea est h ad k q̄re ⁊ q̄ b ad c. et qꝛ g fit ex d in e: et k ex e in f: et idē k ꝑ octauā primi alternatim fit ex f in e: ergo per octauā huius q̄ proportio d ad f: ea est g ad k. At ꝑ precedētem qꝛ vt a ad b: ita g ad h. et vt b ad c: ita h ad k. ergo vt a ad c: ita g ad k. et cū proportio g ad k monstrata sit eadez proportioni d ad f: erit igitur vt a ad c: proportio d ad f. quod erat demonstrandum.



a 4 — c 8

¶ Si fuerit primus ad secūdum: sicut tertius ad quartū. Itēq; primus ad quintum sicut tertius ad sextum: erit sicut primus ad scdm ⁊ quintū: ita tertius ad quartum et sextum. 23

¶ Sit ꝑmus nūerus a: scd̄s b: tertius c: quartus d: quītus e: sextus f. sitq; a ad b: sicut c ad d. et a iteꝝ ad e sicut c ad f: dico vt a ad totū b e: ita c ad totū d f. quia enī a ad b sicut c ad d erit per primā hui⁹ vt b ad a: ita d ad c. erūt igit ꝯtinue proportiōales vt b ad a: ita d ad c. vt a ad e: ita c ad f. q̄re ꝑ vicesimā primam vt b ad e: ita d ad f. ergo ꝑ sextam huius erunt ꝯiūctim vt b et e ad e: ita d et f ad f: per primā igitur hui⁹ vt e ad b e: ita f ad d f. qꝛ ergo vt a ad e: ita c ad f. et vt e ad b e: ita f ad d f. ergo ꝑ vicesimā primam vt a ad b e: ita c ad d f quod est propositum.



c 4 — f 3

¶ Si fuerit primus ad secundum sicut tertius ad quartū fueritq; primus maximus: numerus compositus ex primo ⁊ quarto maior erit numero cōposito ex scd̄o ⁊ tertio 24

¶ Sit a b primus numerus: c secūd⁹: d e tertius: f quartus. sitq; vt a b ad c: ita d e ad f. et sit a b illoꝝ quattuor numeroꝝ maximus. dico compositum ex a b et f: maiorem esse composito ex c et d e. cū enim a b sit maximus est maior c secūdo: quare per scd̄am huius d e maior f quarto. et cū vt a b ad c: ita d e ad f. ergo ꝑmutatim per tertiam huius vt a b ad d e: ita c ad f. sed cū a b sit maxim⁹ per hypothesim est maior d e. ergo per secūdam huius et c maior f. est itaq; f illoꝝ minimus. esto ergo b differentia a b ad c et e differentia: d e ad f. qꝛ sicut a b ad d e: ꝓbatus est c ad f. ⁊ a adequatur c. ⁊ d equatur f. ergo q̄ ꝓportio a b ad d e ea est a ad d detracti scꝫ ad detractum. ergo per quītaꝫ huius vt a b ad d e: ita b ad e residuus ad residuū. q̄re ꝑ scd̄am huius cū a b sit maior d e: etiā b est maior e. sunt itaq; b et f maius d e. quare iteꝝ a b et f maius c et d e. at a et b simul per cōem cōceptum equātur toti a b. est itaq; compositus ex a b et f primo et quarto maior composito ex c et d e secūdo ⁊ tertio. qd̄ est propositum.

f 24
g 32
e 24
d 3
c 6
b 4
a 8

¶ Si fuerint quattuor numeri ꝓportionales: quod sub extremis continetur equale est ei quod producitur ex medijs. quod si producta fuerint equalia: erunt et numeri proportionales. 25

¶ Id sub extremis contineri dicitur qd̄ ex extremo in extremum producitur. Sint a b c d quattuor numeri proportiōales: itavt q̄ proportio a ad b: ea sit c ad d. dico primo ꝙ fit ex a ī d qd̄ sit e equale eē ei quod fit ex b in c quod sit f. Secundo si quod fit ex a in d: equale sit ei qd̄ fit ex b in c numeros illos esse proportionales. Primum patet: ⁊ vt dictum est ex ductu a in d fiat e: et ex ductu b in c fiat f: quos dico esse equales. Duco enim iteꝝ a in b ⁊ proueniat g. erit per septimam huius g ad e vt b ad d. sed et quia ex a in b prouenit g alternatim ex b in a prouenit g. et etiam ex b in c prouenit f. ergo iteꝝ per septimam g ad f vt a ad c. et quia vt a ad b ita c ad d: ergo permutatim per tertiam vt a ad c: ita b ad d. quare e g ad f vt b ad d. et probatus est etiam g ad e vt b ad d quare e et f quoꝝ ad g eūdē numerum est proportio vna: adinuicem sunt equales. quod est primum. Preterea dico si e et f adinuicem sunt equales: a b c d esse proportionales. nam cū e ⁊ f sint equales: ipsius g ad eos est proportio vna. et quia vt dictum est g ad f vt a ad c: et g ad e vt b ad d: erit a ad c vt b ad d. ergo ꝑmutatim per tertiam a ad b vt c ad d qd̄ est numeros a b c d: esse adinuicem proportionales: et secūdum.

c 4 — b 6 — a 9
c 4 — d 6 — b 6 — a 9

¶ Tribus numeris proportiōalibus q̄ sub extremis continetur/ quiq; ex medio in se ꝓducit sunt eq̄les. Et si illi eq̄les fuerint: tres q̄q; numeri erunt ꝯtinue ꝓportiōales. 26

¶ Sint a b c tres numeri cōtinue proportiōales: dico ꝑmo qd̄ fit ex a in c: equale esse ei qd̄ fit ex b in se. Scd̄o si qd̄ fit ex b in se: equale sit ei qd̄ fit ex a in c tres numeros a b c eē cōtinue proportiōales. Primam partem probas per primam partem precedentis posito b bis aut quēcunq; numerum vt d equalem b. Et scd̄am partem per p̄cedentis secūdam partem: nec vt demōstretur est difficultas.

¶ Si fuerit proportio primi ad secūdum maior q̄ tertij ad quartum: qui ex primo in quartum producit: maior est producto ex secundo in tertium. Et si ꝓductus ex ꝑmo in quartum sit maior: et proportio primi ad secundum maior erit. 27

¶ Sit a ad b ꝓportio maior q̄ c ad d: dico p̄mo qd̄ fit ex a in d maius esse eo qd̄ fit ex b in c. Secundo si qd̄ fit ex a in d maius est eo qd̄ fit ex b in c ꝓportionē a ad b maiorem esse ꝓportione c ad d. Primū patet et duco a in d et ꝓueniat e et b in c et ꝓueniat f: dico e maiorem esse f. Duco p̄terea b in d et fiat g. quia ḡ a in d producit e et b in d producit g: ergo per octauam huius q̄ proportio a ad b ea est e ad g et qr f fit ex b in c: et g ex b in d: per septimā huius q̄ proportio c ad d ea est f ad g. mōstratū est igitur vt que ꝓportio a ad b: ea sit e ad g. et que c ad d: ea sit f ad g. At ꝓportio a ad b posita ē maior ꝓportiōe c ad d: ergo proportio e ad g maior est proportiōe f ad g. ergo per nonā huius e maior est f qd̄ est p̄mū. Ecōuerso dico si e est maior f ꝓportionē a ad b maiorem esse proportiōe c ad d. Nam quia e est maior f: per nonam maior est proportio e ad g q̄ f ad g. At ꝓportio e ad g ea est q̄ a ad b. et proportio f ad g ea q̄ c ad d vt ostensum est. igiẗ proportio a ad b maior ꝓportiōe c ad d qd̄ est scd̄m atq3 totū ꝓpositū.

28 ¶ Positis duobus numeris an sit tertius cū illis continue ꝓportionalis: perscrutari.

¶ Datis ergo duobus nūeris ponatur eoꝝ quilibet quē voles secūdus: quē duc in seip̄m: si reliquus ꝓductum scd̄m aliquē numeret numerus scd̄m quē ꝓductū numerabit erit tertius nūerus in ꝯtinua proportionalitate ip̄is per vicesimamsextam adiungēdus. Sin reliquus ꝓductum s̄m aliquē numerū non numerabit: per eādem nullus ip̄sis adhibebitur ꝯtinue proportionalis.

29 ¶ Datis tribꝰ nūeris an sit tertius ad aliquē s̄m ꝓportiōem p̄mi ad scd̄m: inuestigare.

¶ Eadem facilitate hec pateat. nam datis tribus numeris duc secūdū in tertiū: et si primus numeret ꝓductum s̄m aliquem: is s̄m quem productum numerat est per vicesimāquintam ad quem tertius vt primus ad secūdum se habet. At si primus productum s̄m aliquem non numeret per eādem vicesimā quintam nullus tertio in proportione primi ad scd̄m adiungetur.

¶ Secundi elementoꝝ arithmetices Jordani finis.

Numerus primus dicitur: qui non habet partem preter vnitatem. Compositus vero qui habet alium numerum ip̄m numerantem. Cōmensurabiles siue cōicātes vocātur: quos cōiter aliquis nūerus numerat. Cōtra se primi autē dicūtur: qui a nullo cōiter numerātur excepta sola vnitate. Termini ꝓportionis dicūtur numeri minimi: inter quos inuenitur illa ꝓportio

1 ¶ Omnis numerus primus: ad oēm quem non numerat est primus.

¶ Sit a quicūq3 numerus primus: dico a ad quēcunq3 numeꝝ quē numerat esse cōmensurabilē atq3 cōicantē et ip̄m et quēcunq3 alteꝝ quē non numerat esse ꝯtra se primos. Primū patet nā si a aliquem numerū numerat illū s̄m seip̄m aliquoties sumptum numerabit: quare ip̄e a seip̄m et alteꝝ nūerabit: erit vtiq3 per diffinitionem cōmensurabilis atq3 cōicans ad alteꝝ. Scd̄m patet: nam si a aliquem numerum non numerat nullus numerus vtrūq3 cōiter numerabit: alioquin numeraret a: et a nō esset primus. quod est ꝯtra hypothesim. ꝑ diffinitionem igitur a et numerus quem non numerat sunt ꝯtra se primi / et a primus ad illum quod est scd̄m.

2 ¶ Omnis numerus compositus: ab aliquo primo numeratur.

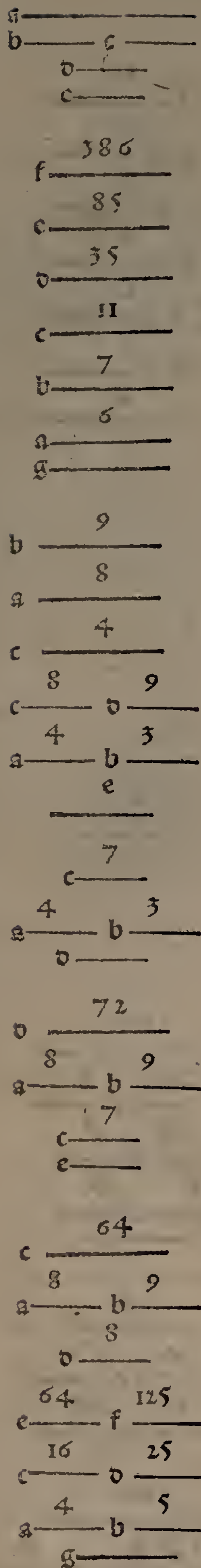
¶ Sit a quicūq3 numerus compositus ꝓductus ex b in c. aut ergo b aut c est primus: et sic de eo hētur propositum. aut vterq3 est cōpositus. qd̄ si sic: fiat ergo b ex d i e: si iteꝝ vterq3 d et e sit compositus: fiat iteꝝ d ex f in g. si iteꝝ vterq3 eoꝝ est compositus: hac rōne in infinitum numeri decrescent. qd̄ est cōtra petitionem et impossibile: nisi deueniatur tādem ad numerum quem nullus alius numerabit. deueniemus igitur tādem ad aliquem numerum que3 nullus alius numerabit et ꝓpter hoc primū: qui cum erit pars partis: ergo et per vicesimamtertiam primi erit et ꝑs totius. quare per diffinitionem partis numerabit ip̄m totum quod est propositum

3 Omnis numerus aut est primus: aut a primo numeratur.

¶ Nam omnis numerus aut est primus aut compositus. atqui per precedentem omnis numerus cōpositus a primo numeraẗ. igiẗ oīs numerus aut est p̄mus aut a p̄mo numeratur. qd̄ intēdit ꝓpositio

4 ¶ Si aliquis numerus primus numerum ex duobus ꝓductum numeret: necesse est eundem alterum eorum numerare.

¶ Sit a numerus ꝓductus ex b in c: quē numeret numerus primus d scd̄m e: dico numerū primū d numerare alteꝝ duoꝝ b aut c. Et esto non numeret b: dico ip̄m nūerare c. Intelligo enī primū numerū d: scd̄m b: tertium c: quartū e. quia qd̄ cōtineẗ sub extremis d et e: equū est ei qd̄ cōtinetur sub medijs b et c. ergo per secūdam partem vicesimequinte secūdi: d b c e sunt proportionales. vt que proportio d ad b: ea sit c ad e. si ergo b fuerit maior d: etiā et e maior c. vt ex demōstratiōe secūde scd̄i cognoscitur. Detractis ergo quoties fieri poterit d et c de b et e relinquantur f et g. eritq3 per tricesimam primi vt quota pars vł partes f relicta sit d: tota pars vel partes g sit c. q3 si f relicta sit pars d: cu3 d sit nūerus primus f est vnitas. quota ergo vnitas est in d: tota pars g est in c. ergo per septimā primi quota pars vnitas est in g: tota pars d erit in c. numerabit igitur d ip̄m c. At vo si f relictus sit partes d: est vnitates vt ostensum est: et tote partes erit g ip̄ius c. capiam ergo vnā vnitatem ab f que sit h: et vnā partem ab g que sit k: et argumentabor vt prius per septimam p̄mi. quota pars h vnitas est ad d: tota ꝑs est k ad c. ergo per septimā primi q̊ta pars h ad k: tota d ad c. quare iteꝝ d numerat c. At vo si d maior est b per scd̄a3 scd̄i: c est maior e. et qr q̄ ꝓportio d ad b eadē est c ad e: ḡ ꝑ primā scd̄i etiā que ꝓportio b ad d: eadē erit e ad c. quare quota pars vł partes b est ad d: tota ꝑs vel ꝑtes e ad c. Diuido ḡ b et e in illas



partes:manifestũ est enĩ cum d sit numerus primus/ vnã partiũ b eẽ vnitatẽ.capio ergo vnã partiũ b que sit f: et vnã partiũ e q̃ sit g:q̃a igit̃ quota pars f vnitas est d:tota pars g est ipsius c:ergo per septimã primi quota pars f vnitas ad g:tota pars d est ad c:numerabit igit̃ d ipsũ c qđ iterũ ẽ ꝓpositũ

¶ Si numerũ ex duobus ꝓductũ tertius numeret:idẽ alteri illoꝝ erit cõmẽsurabilis 5
¶ Sit a numerus ex b in c ꝓductus quẽ numeret d:dico d alteri numeroꝝ b aut c esse cõmensurabilem.nam aut d est primus:aut cõpositus.si primus:ergo per p̃cedentẽ alterũ eoꝝ numerat/ quare alteri eoꝝ erit ꝯmẽsurabilis.si cõpositus:ergo per secundã huius ab aliquo primo numerat̃ d: qui sit e.q̃a e numerat d:numerabit etiã per vicesimã tertiã primi a:quare e per p̃cedentẽ numerabit b aut c et cũ etiã cõiter numeret d:sunt per diffinitionẽ d et alter duoꝝ b aut c quos cõiter e idem numerus numerat/ cõmensurabiles:quod intenditur.

¶ Sũptis quotlibet numeris primis:diuersũ ab illis numerũ primũ esse necesse est. 6
¶ Sint a b c quotlibet numeri primi:dico alterũ ab ipsis esse.Duco enĩ numerũ primũ in secũdũ et ꝓueniat d:et tertiũ in ꝓductũ et ꝓueniat e:et si esset quartus:ducerẽ ipsũ in ꝓductũ e:et ita deinceps et quia priores semꝑ erũt partes partiũ vltimi ꝓducti:ergo per vicesimã tertiã primi et diffinitionẽ: oẽs illi numeri primi numerabũt vltimũ ꝓductũ:cui addo vnitatem:et sit totus ꝓductus f:qui aut est primus/ sicq̃ cõstabit ꝓpositũ.aut cõpositus:qui si fuerit cõpositus:per secundã huius ab aliquo primo numerat̃ qui sit g.et cum g sit primus et nõ sit aliq̃s p̃dictoꝝ:nam si aliquis p̃dictoꝝ: numeraret f cum numeret detractũ e vt ostensũ est:per duodecimã primi numeraret residuũ: numer⁹ scꝫ vnitatem/quod est impossibile:constat igit̃ aliũ ab ipsis esse numerũ primũ.

¶ Si fuerint duo numeri ꝯtra se primi:q̃cũq̃ numerat alteꝝ est ad reliquũ primus. 7
¶ Sint a et b ꝯtra se primi et c numeret a:dico b ⁊ c esse ꝯtra se primos:alioquin si c numerat b aut alius quicũq̃ b et c:cum idem per vicesimã tertiã primi numeraret a:nõ essent a et b contra se primi quod est contra hypothesim.

¶ Quicunq̃ numerãt numeros contra se primos:et ipsi sunt adinuicem primi 8
¶ Sint a b numerãtes c d numeros cõtra se primos:a quidẽ c et b ipsũ d:dico a b eẽ cõtra se primos nam si sint cõmẽsurabiles sit e eos cõiter numerãs:q̃a ergo e numerabit a etiã per vicesimã tertiã primi numerabit c.et q̃a e etiam numerat b per eãdẽ numerabit d.nõ sũt igit̃ c d contra se primi:qđ est contra hypothesim.

¶ Numerus cõpositus ex duobus numeris ꝯtra se primis:ad vtrũq̃ illoꝝ est p̃mus 9
¶ Sint a ⁊ b numeri cõtra se primi:et cõponãt c:dico c ad vtrũq̃ eoꝝ esse primũ.nam si est cõmensurabilis vni eoꝝ vt nũero a: numeret igit̃ eos aliq̃s numerus vt d:q̃a ergo d numerat c et a detractũ: ergo per duodecimã primi d etiã numerat b residuũ.nõ sũt igit̃ a b ꝯtra se primi/ qđ est cõtra positũ.

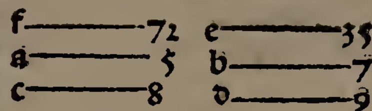
¶ Si duorum numerorum vterq̃ ad tertium fuerit primus:et qui ex ipsis producit̃ ad eundem erit primus. 10
¶ Sint a b duo numeri quoꝝ vterq̃ ad c sit p̃mus:et sit d ꝓductus ex a in b:dico d esse p̃mũ ad c.nã si c et d essẽt cõmẽsurabiles:aliq̃s eos vt e cõiter numeraret:qui cũ numeraret d ꝓductũ ex duob⁹ scꝫ a et b:ꝑ quartã hui⁹ cõicabit alteri eoꝝ: qđ ꝑ septimã hui⁹ ẽ ipossibile.nõ itaq̃ c et d sũt ꝯmẽsurabiles

¶ Si fuerit duo numeri ꝯtra se p̃mi:q̃ ex alt̃o i se ducto ꝓducit̃ ad reliquũ erit p̃m⁹ 11
¶ Sint a et b ꝯtra se p̃mi:et a in se ductus ꝓducat c:dico c esse p̃mũ ad b.capio d equale a:et q̃a vterq̃ a et d est primus ad b:ergo per p̃cedentẽ qui fit ex a in d est p̃mus ad b.sed qui fit ex a in se: equat̃ ei qui fit ex a in d:igitur qui fit ex a in se est primus ad b.quod est propositum.

¶ Si fuerint duo numeri contra se primi:qui ex eis in se ꝓducent̃ erũt adinuicẽ primi.Et si iidem in ꝓductos ducant̃:et qui inde ꝓducẽtur erunt cõtra se primi.Sicq̃ deinceps si principia in ꝓductos ducantur:ꝓducti erunt incommensurabiles. 12
¶ Sint a et b cõtra se primi:ducat̃q̃ a in se et fiat c:et b in se et fiat d:dico c d esse cõtra se primos. Item dico si a ducat̃ in c et fiat e:et b in d ⁊ fiat f:sil'iter e f eẽ incõmẽsurabiles atq̃ cõtra se primos. et si iterũ duxeris a in e et b in f/ qui ꝓducent̃ esse cõtra se primos:et hoc quoties feceris ita euenire. Primũ patet: nam per p̃missã quia a est primus ad b et c fit ex a in se:per p̃cedentem c est p̃mus ad b et quia c est primus ad b et d fit ex b in se:per eãdem c est primus ad d quod est primũ. Preterea q̃a vterq̃ a et c est primus ad b:igitur per decimam e qui ex ipsis producitur est primus ad b.quia igit̃ e b sunt contra se primi:et d producitur ex b in se:per precedentem e etiaꝫ est primus ad d.cum itaq̃ vterq̃ duorum b d sit primus ad e vt' monstratum est: igitur per decimam f qui fit ex ipsis scilicet ex b in d est primus ad e.et ita q̃tũcunq̃ series ꝓcedat cõclude.et hoc est scdm. ¶ Ex huius prima parte cognoscit̃:tetragonos quoꝝ latera incõmensurabilia sunt esse incõmensurabiles.et ex secũda:tesseras incõmensurabiles esse quarũ latera sunt incõmensurabilia.et cõtra demõstrare promptũ est si latera sunt cõmensurabilia:tetragonos et tesseras esse cõmensurabiles.Ut sint a b latera cõmensurabilia et c tetragonus a:et e eius tessera.d tetragonus b:et f eius tessera: quia a b sũt cõmensurabiles:ergo ẽ nũerus cõiter eos numerãs qui sit g:quia g numerat a:ergo per vicesimã tertiã primi numerat c et e:et quia etiã g numerat b: per eandẽ vicesimã tertiã numerat d et f.sũt igit̃ tetragoni c d: itidẽ et tessere e f adinuicẽ cõmensurabiles.sed de his hactenus:quoꝝ in sexto huius vbi de numeris tum quadratis tum cubis agetur exactissima determinatio futura est.

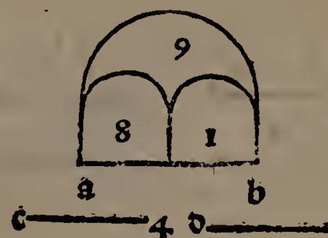
13 ¶Si duo numeri ad aliquos duos vterq₃ ad vtrunq₃ fuerit primus: ꝛ qui ex eis pro ducitur ad productum ex reliquis erit primus

¶Sint a b primi ad c et primi ad d: ꝛ ex a in b fiat e ꝛ ex c in d fiat f. dico e et f esse inter se primos. nā q: vterq₃ numerus a ꝛ b est primus ad c per decimā huius e est primus ad c. et q: iterū vterq₃ a ꝛ b est primus ad d: ergo per eandē e est primus ad d. est itaq₃ vterq₃ duorum c d mōstratus primus ad e: quare per eandem decimā f productus ex illis est primus ad e: quod erat demōstrandum.



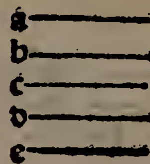
14 ¶Si fuerint duo numeri contra se primi minorq₃ de maiore aliquoties detrahatur: aut relinquetur vnitas aut numerus ad detractum primus

¶Sint a b et c cōtra se primi: a b maior / c minor. detrahat́q₃ c de a b aliquoties: sitq₃ substractus a et residuū b. dico b aut esse vnitatē aut esse numerū primū ad c. Nam si b sit cōmensurabilis c: sit d illorū cōis mensura. q: d numerat c p vicesimātertiam primi etiam numerabit a. et q: etiam numerat b per nonā primi numerabit totum a b. nō erunt igitur a b ꝛ c contra se primi: qđ est contra hypothesim.



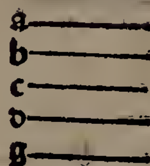
15 ¶Cum fuerint duo numeri contra se primi et minore de maiori quoad pōt detracto: residuū a prius detracto detrahatur cōtinua hoc pacto detractione facta: vnitatē relinqui necē est. ꝙ si vnitas residua fuerit: positos nūeros incōmēsurabiles eē ꝯueniet.

¶Sint a b duo numeri cōtra se pmi: a maior et b mior: detrahat́q₃ b ab a quoties id fieri pōt et relin quat́ c qui detrahat́ quoties pōt a nūero b. ꝛ ita continue hoc pacto detractio quoad pōt. dico primo tandē relictū iri vnitatē. dico scđo ꝙ si hoc pacto cōtinuata detractiōe relicta sit vnitas datos nūeros esse cōtra se primos. Primū pʒ. nam detrahat́ b de a quoties pōt et relictū residuū sit c: ipm c relictū minus ē b. ꝛ p p̄cedentē aut est vnitas aut nūerus primus ad b. si vnitas cōstat qđ ꝓponit́. si nūerus p̄mus ad b detraho ipm quoties possuʒ ab ipso b ꝛ relinq̄tur min⁹ c qđ sit d. quod q̄d̄ē p per p̄cedentē sit́r est vnitas aut nūerus prim⁹ ad c. si nūerus p̄mus ad c ipm detrahā ab c: quare aut semp decrescet numer⁹ dando minorē ad primū ḟm exigentiā p̄cedētis: aut relinq̄tur vnitas qđ est primū. Scđm pʒ. nā si a et b sunt cōmēsurabiles idē numer⁹ nūerabit totū ꝛ detractū. quare p duodecimā primi idē nu merabit residuū numerus scʒ vnitatē qđ est īpossibile. qđ quidē vt clarius ꝑcipias sic ꝯsidera. si a et b sint ꝯmēsurabiles d: ergo eos cōiter numeret: substrahat́q₃ b ab a quoties pōt et reliquat́ c si c sit vni tas cū numer⁹ d numeret b nūerabit oēm numeratū ab b p 23 p̄mi: quare totū detractū ab a ꝛ nūerat etiā a vt positū est. ergo p duodecimā primi d etiā numerabit residuū scʒ c: numerus scʒ vnitatē qđ est īpossibile. ꝛ si c sit nūer⁹ q: d nūerat totū a et detractū vt ꝓbatū ē: ergo p duodecimā p̄mi d etiā nume rabit c residuū. detrahat́ ergo quoties pōt c de b ꝛ relinquat́ e. si e est vnitas argumētare vt prius nu merū d numerare e vnitatē. si vero e sit nūerus consiḿr d ipsum numerabit. et sic ꝓcedēdo habebis ꝙ q̄ncūq₃ dabitur vnitas ipam d numerabit: qđ est īpossibile. Et ex hac demōstratione elice si duoꝝ ꝯmē surabiliū alter ab altero quoties pōt substrahat́ sitq₃ residuus residuū illis esse cōmensurabile.



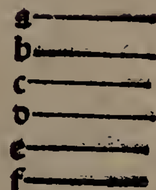
16 ¶Datis duobus numeris cōicantibus: maximū eos numerantē inuenire. vnde mani festū est ꝙ ois numerus duos quoscunq₃ numerās maximū eos numerantē nūerabit

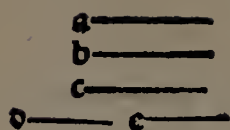
¶Sint a b duo numeri cōicantes: a maior et b minor ꝓpositū est maximū numeꝝ ipsos numerātem īuenire. Si eni b nūerat a: cū b se etiā numeret ipse est maxim⁹ eos numerās. sinautē b nō numerat a detrahat́ b ab a quoties p̄t et sit relictus c: q̄ si nūeret vtrūq₃ ipse ē numer⁹ petitus. si nō nūeret detra hat́ ergo iterū c ab b quoties p̄t et sit relictus d q̄ erit minor c. si numeret dꝰ vtrūq₃ b ꝛ a ipse ē petitus. at si nō numerat q: nō decrescet numerus in infinitū neq₃ decumbet ad vnitatē: q: per p̄cedentē a et b essent cōtra se primi tandē deuenient́ ad aliquē qui añ relictū numeret quē ꝙ primū habebim⁹ dico ipʒ esse maximū numeꝝ eos cōiter numerantē. nā si eo maior ponat́: accidet p duodecimā primi maiorē numerare minorē: qđ est īpossibile. Ex hoc correlariū est notum. ponāt́ eni a b numeri cōicantes et b minor substract⁹ ab a quoties pōt ꝛ relictus c: et c substractus ab b quoties pōt ꝛ relictus d q̄ substra ctus ab c nichil relinquat: q̄ ideo erit maximus numerās a ꝛ b per p̄ntem: et sit g cōiter numerās a b. dico g nūerare d maximū numerantē. si eni g sit idē numero d: cum ois numerus seipm numeret etiā de eo verum est propositū. si est alius ab d ipō erit maior d. nā d nō esset maximus numerus numerās a b verū potius g. erit ergo minor de necessitate: qui q̄a numerat b. ergo p vicesimātertiam primi nu merabit totum detractū ab a. ꝛ cum etiā numeret a: per duodecimā primi numerabit residuū c: ꝛ cum numeret c per vicesimātertiam primi numerabit totum detractū a numero b. et cum numeret b: ergo per duodecimā primi numerabit residuū scʒ d: quod est propositum.



17 ¶Propositis quotlibʒ nūeris adiuicē ꝯpositis maximū eos cōiter nūerātē reperire.

¶Sint a b c quotlibet nūeri adinuicē ꝯpositi ꝓpositū est maximū numeꝝ eos nūerantē inuenire. In uenio eni per p̄cedentē maximū numerātē a et b q̄ sit d. q̄ si numerat c: ille ē qui petit́ alioqui si dabis maiorē accidet p duodecimā primi minorē numerare maiorē. si aūt d nō numerat c: q: ergo q̄cunq₃ nu merat a b c nūerat a b. ꝛ q̄cunq₃ nūerat a b p correlariū precedētis numerat d maximū numeꝝ eos nu merantē. ergo d ꝛ c sunt ꝯmēsurabiles. inuenio ergo p precedentē maximū numeꝝ numerantē c ꝛ d q̄ sit e quē dico esse maximū numerantē a b c. nā si sit quicūq₃ alius maior e eos cōiter numerās: is sit f. q̄a ergo f numerat a b p correlariū precedētis numerat d maximū eos numerantē. ꝛ q̄a numerat d et etiā c per positū: ergo per idē correlariū numerat e maximū eos nūerantē. at f ponit́ maior e. nūerat igit́ maior minorē: qđ est īpossibile. relinq̄tur igitur e esse maximū numerantē a b c et propositū.

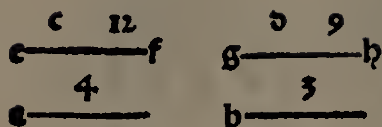




Quilibet duo numeri in sua proportione minimi: sunt contra se primi. 18

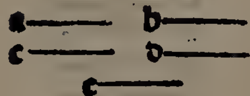
Sint a b duo nūeri in sua ꝓportione mīmi: dico eos esse contra se p̄mos. nā si sint ꝯpositi sit cōis eoꝝ mēsura c q̄ nūeret a ſm d et b ſm e ꝑ septimā scđi q̄ ꝓportio d ad e ea est a ad b. at cū d sit minor a et e minor b non erant a ⁊ b in sua ꝓportione minimi: quod est contra positum.

Numeri quilibet in sua proportione minimi numerant quoslibet in eadem propor tione sumptos minor minorē ⁊ maior maiorem equaliter. 19



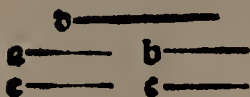
Sint a et b mīmi in sua ꝓportione: a maior b minor: sintq̄ eiusdē proportionis c d: c quidē maior d minor. dico a numerare c et b numerare d equalit̃. nā q̄ vt a ad b ita c ad d: ergo permutatī per tertiā secūdi vt a ad c ita d ad b. quota ergo pars vel ꝑtes est a ad c tota pars vel ꝑtes est b ad d. si tota pars constat ꝓpositū a equalr̃ nūerare c ⁊ b numerare d. si tote partes ergo ꝑ tricesimā primi q̄ toties erit a in c quoties b in d. et quota pars vel ꝑtes a remāserint in c: tota pars vel ꝑtes b remanebūt in d. substraho ergo quoties possum a de c ⁊ detract⁹ sit e et residuus f. similit̃ substraho quoad possum b de d. et detractus sit g ⁊ residuus h. q̄ ergo a nūerat e: ⁊ b numerat g equalit̃ atq̄ ſm eundē numerū. ergo per octauā scđi que proportio a ad b ea est e ad g: ergo ⁊ q̄ proportio c ad d totius ad totū: ea est e ad g detracti ad detractū. igitur ꝑ quintā secundi: q̄ ꝓportio c ad d totius ad toum: ea est f ad h residui ad residuū. quare iterum q̄ proportio a ad b: ea est f ad h. at cum f et h relicta sint minora a ⁊ b: nō erant itaq̄ a et b in sua proportione minimi: quod est contra hypothesim. constat ergo quoscūq̄ in sua proportione minimos ceteros vt dictum est numerare.

Si fuerint duo numeri adinuicē primi ipsi erunt in sua ꝓportione minimi. 20



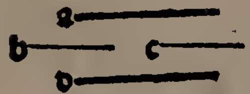
Sint a et b nūeri adinuicē primi: a maior b minor. dico eos in sua ꝓportione esse mīmos. nā si sint aliĳ q̄ sint in illa ꝓportione mīmi: sint ergo illi c d: q̄ ergo c d sunt in illa ꝓportione mīmi ꝑ p̄cedentē numerabūt quoslibet in eadē ꝓportione minor minorē ⁊ maior maiorē equalit̃. nūeret ergo c numeꝝ a scđm e ⁊ d numeret b secundū eundem numerū e manifestū est q̄ e numerabit a et b: quare nō sunt a ⁊ b contra se primi: quod est contra hypothesim.

Positis duobus numeris contra se primis si alter ducatur in numeꝝ quē reliquus nō numerat productus quoq̄ ab eodem non numerabitur. 21



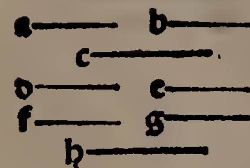
Sint a b numeri contra se primi et a ducatur in c ⁊ proueniat d et b nō numerat c: dico b nō numerare d. Si ergo b numeret d: numeret ergo ipsum ſm e intelligo primū numerū a: secundū b: tertiū e et quartū c. q̄ ergo qđ cōtinetur sub extremis a c equū est ei quod cōtinetur sub mediis b e. ergo per vicesimāquintā secundi que proportio a ad b: ea est e ad c. q̄ ergo a b sunt primi per precedētem sunt in sua proportione minimi: ergo per ante precedentē a numerabit e: ⁊ b numerabit c equaliter: quod est contra hypothesim. positū enim erat b nō numerare c.

Si numerum a duobus productum tertius numeret: idem alterum eorum nume rabit aut erit vtriq̄ commensurabilis. 22



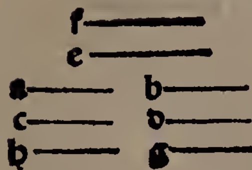
Sit a numerus productus ex b in c quē d numeret: dico d numerare b aut c aut esse vtriq̄ cōmensu rabilem. Si enī alteri fuerit incōmensurabilis vt verbi causa b: cū ergo b et d sint contra se primi ⁊ b in c producat a: ergo per precedentē si d nō numerat c neq̄ quidē d numerabit a. at positus est d nume rare a. numerat igitur d alterū eoꝝ. Si itaq̄ vni fuerit incōmensurabilis necessario numerat alterū ideo vtriq̄ incōmēsurabilis eē nequit q̄ fit vt aut nūeret alterū aut vtriq̄ sit ꝯmēsurabilis ⁊ ꝓpositū.

Numeros minimos: ſm proportionē numeroꝝ assignatorū perscrutari. pateq̄ ex hoc maximū duos numeros cōiter numerantē: ſm mīmos illius ꝓportionis nūerare 23



Sint a b in aliqua ꝓportione: propositū est mīmos numeros ꝓportionis a ad b reperire. aut enim a ⁊ b sunt contra se primi et tunc per vicesimā huius illi sunt in sua ꝓportione minimi neq̄ aliĳ q̄rendi sunt. aut sunt cōpositi ⁊ tunc per decimāsextam hui⁹ quero maximū numerū eos numerantē qui sit c nūeretq̄ a ſm d: et b ſm e. ꝑ septimā ergo scđi eadē est ꝓportio a ad b ⁊ d ad e. dico itaq̄ d et e esse mī mos nūeros in illa ꝓportione. si enī sint aliĳ sint f ⁊ g: q̄ f et g sunt mīmi in illa ꝓportione. ergo ꝑ deci mānonā huius numerāt a b: maior maiorē ⁊ minor minorē ſm eundē numerū qui sit h. intelligo ergo quattuor nūeros: c primū: f secundū: h tertiū: et d quartū. q̄ a cōtinetur sub extremis c d: ⁊ idē a sub mediis f h: ergo ꝑ vicesimāquintā secundi q̄ proportio c ad f ea est h ad d. ergo ꝑmutati per tertiā scđi eadē est ꝓportio c ad h et f ad d. sed f posit⁹ est mīor d: ergo et c minor h. tūc sic c est maxim⁹ numerus numerās a b ꝑ hypothesim et h positus est etiā numerare a b: ergo h ꝑ correlariū decimesexte huius numerabit c maior scȝ minorē quod est īpossibile. nō dabūtur igitur aliĳ ab ipsis d e in illa ꝓportione minimi quod est propositū: et in hoc etiam correlariū notum est.

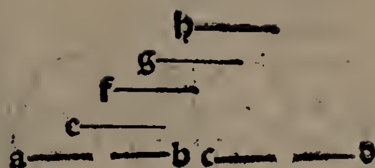
Quilibet duo numeri minimos numeros sue proportionis maior minorē et minor maiorē multiplicantes: minimū ab ipsis numeratum producunt. Ex quo constat mi nimum quē duo numerant: quēlibet ab eis numeratū numerare. 24



Sint duo nūeri a b multiplicātes c d mīmos sue ꝓportionis maior minorē ⁊ minor maiorē: dico ipsos minimū ab ipsis numeratū ꝓducere. nā q̄ sicut a ad b ita c ad d: ergo per vicesimāquintā scđi qui cōtinetur sub extremis a d equus est ei q̄ continet̃ sub mediis b c qui sit e quem dico esse minimū ab ipsis numeratū. Si enī sit alter esto ergo ipse f quē a ſm g ꝓducat et b scđm h. positis ergo ordine t̃minis a b h g: q̄ qui cōtinetur sub extremis a g equat̃ ei qui cōtinetur sub mediis b h. ergo per vice

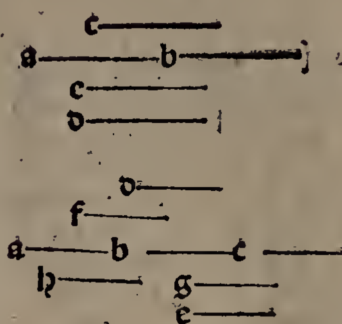
ſimāquintā ſecundi q̄ proportio a ad b ea eſt h ad g: quare et q̄ c ad d. et qꝛ a ꝓducit e ſcd̄m d et idem a ꝓducit f ſcd̄m g. ergo ꝑ ſeptimā ſecūdi q̄ proportio d ad g: ea eſt e ad f. at cū c ad d ſicut h ad g: ergo ꝑmutatim ſicut c ad h: ita d ad g. quare ſicut c ad h: ita e ad f. ſed c numerat h per decimānonā huius ergo et e numerat f: et f poſitus eſt minor e. numerat igitur maior minorē: quod eſt impoſſibile ⁊ propoſitum. Et ex modo demonſtrationis patet correlarium.

25 ¶ Propoſitis quotlibet numeris: minimū ab eis numeratū inueſtigare.



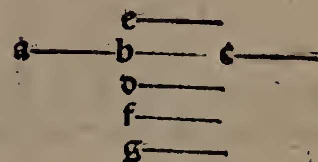
¶ Sint a b c d quotlibet numeri: quoꝝ proponiť minimū ab eis numeratū inuenire. quero primo minimū quem numerāt a et b: ꝙ ſi a numerat b certū eſt b eſſe minimū ab eis numeratū. et ſi a et b ſunt cōtra ſe primi duco vnū in alterū. et qꝛ illi ſunt ꝑmi: ergo ꝑ viceſimā hui⁹ erūt in ſua ꝓportione mīni ꝑ precedentē igiť ꝓductus ab ipſis erit mīmus quē numerabūt. at ſi ipſi fuerint cōicantes ſumo per ꝑcedentē minimū quē numerāt q̄ ſit e: et conſiľr capiā minimū quē numerāt c e q̄ ſit f et minimū quē numerāt d f q̄ ſit g quē dico eē minimū numeꝝ quē numerāt a b c d. numerabunt enī eum ꝑ 23 primi. at ꝙ nō numerēt minorē ꝓz. nā ſi ſit dabilis nūerus minor g quē numerāt a b c d ſit ille h: qꝛ ergo a b numerāt h. ergo ꝑ correlāriū ꝑcedētis e mīmus ab eis numerat⁹ nūerat h. et qꝛ e ⁊ c numerāt h: ergo ꝑ idē correlariū f mīmus ab eis nūeratus nūerat h. et qꝛ f nūerat h et d poſit⁹ eſt etiā ipſum nūerare ergo per idem correlariū g minimus ab f ⁊ d numeratus numerabit h. at h poſitus eſt minor g: numerat igitur maior minorē: quod eſt impoſſibile.

26 ¶ Si minimū numeꝝ a quotlibet numeratum aliquis primus numeret: eundē quoq̄ aliquem illorum numerare neceſſe eſt.



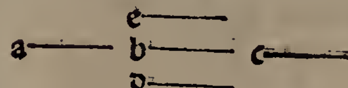
¶ In duob⁹ numeris id facile ꝑpendiť. Sint ergo a b duo nūeri: c mīmus ab eis numerat⁹: et d nūerus ꝑmus numerans c: dico d nūerare a vel b. numeret enī a minimū numeratū c ſcd̄m e: ergo per 24 hui⁹ e eſt vnus mīmoꝝ ꝓportiōis a ad b numerās b. tūc ſic d numer⁹ prim⁹ nūerat c ꝓductū a duob⁹ nūeris a et e. ergo ꝑ quartā huius d nūerat alterū numeroꝝ a aut e. ſi a cōſtat ꝓpoſitū: ſi e itidē. nā ꝑ viceſimāquartā numerabit b. In pluribus aūt conſiľr oſtēditur. Sint a b c quotlibet nūeri d mīmus ab eis nūeratus: e nūerus ꝑmus numerās d: dico e nūerare a b aut c. capio enī ꝭm exigentiā ꝑcedētis mīnū numeꝝ quē numerāt a b q̄ ſit f: et mīnū numeꝝ quē numerāt f c quē ex ꝑcedēti manifeſtū eſt eē d et nūeret c mīnū d ſcd̄m g q̄ per 24 huius eſt vnus nūeroꝝ ꝓportionis f ad c et q̄ numerat f. Cum itaq̄ e numerus ꝑmus numeret d ꝓductū ex duob⁹ numeris c g: ergo ꝑ quartā huius e nūerat alterū numeroꝝ c g. ſi numerat c cōſtat ꝓpoſitū: ſi numerat g ergo ꝑ viceſimāquartā numerat f. qꝛ ergo f eſt mīnius numer⁹ quē numerāt a b. nūeret ergo a minimū f ſcd̄m h q̄ per ſepe ſumptā viceſimāquartam hui⁹ erit vnus mīmoꝝ ꝓportionis a ad b et numerās b. cum ergo e ꝓbatus ſit nūerare f productū ex duobus numeris a h: ergo per quartam huius numerat a aut h. ſi numerat a conſtat propoſitum. ſi h itidē. nam h numerat b: quare e per viceſimātertiam primi etiā numerabit b: et propoſitū.

27 ¶ Cum fuerint quotlibet numeri ad aliquem primi: et minimus quem numerant ad eundem erit primus.



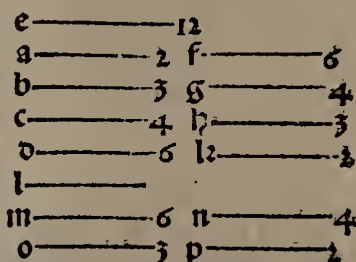
¶ Sint a b c quotlibet numeri primi ad d: ſitq̄ e mīmus numer⁹ quē numerāt a b c: dico e eſſe primū ad d. nā ſi d eſt cōmēſurabilis ad e: ergo eſt aliq̄s numer⁹ eos cōiter numerās q̄ ſit f. Si enī f ſit nūer⁹ ꝑmus cū numeret e: ergo ꝑ ꝑcedentē nūerabit a b aut c. et cū etiā nūeret d nō ſunt ergo a b c ꝑmi ad d qđ eſt contra hypotheſim. at ſi f ſit nūerus ꝯpoſitus ergo ꝑ ſcd̄am huius f ab aliquo ꝑmo numeratur q̄ ſit g: qui ꝑ viceſimātertiā primi numerabit d et e: qꝛ ergo g eſt primus ⁊ nūerat e. ergo ꝑ precedentē nūerabit a b aut c et etiā numerat d. nō ſunt igitur a b et c primi ad d: quod eſt contra hypotheſim.

28 ¶ Si ſumatur minimus numerus quē numerant aliquot primi numeri aſſignati: aliū ab illis numerum primū: eundem numerare impoſſibile eſt.



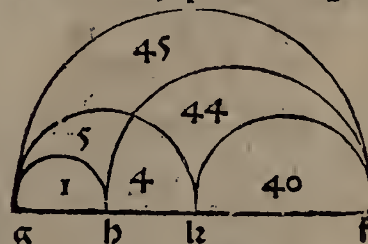
¶ Sit e mīmus nūerus quē nūerāt a b c quotlibet nūeri ꝑmi: dico nullū ipſis ꝑmū aliū ab ipſis nūerare e. nā ſi dareť alius vt d: qꝛ ipſe nūeraret e. ergo ꝑ 26 nūeraret etiā a b aut c: qđ eſt ꝯ hypotheſim.

29 ¶ Numerū minimū: propoſitarū denoīationum partes habentē inuenire.

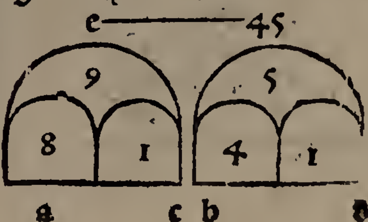


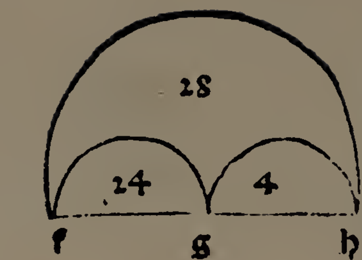
¶ Si propoſitarū partium vt verbi cā vnius ſecūde tertie quarte ⁊ ſexte ꝓpoſitū ſit minimū numeꝝ ꝑtes illas hn̄tem reperire. capio a b c d nūeros partes illas denoīantes quoꝝ mīmus ab eis nūerat⁹ ſit e: nūeretq̄ a minimū e ſcd̄m f: et b eundē ſcd̄m g: et c eundē ſcd̄m h: ⁊ d eundē e ſcd̄m k. alternatim ergo ꝑ octauā primi f g h k numerabūt e ꝭm a b c d datos nūeros: erūt ergo in e partes denoīate ab a b c d quē ⁊ dico eſſe minimū in quo ꝑtes ille reperiātur. ꝙ enī partes illas habeat: iam notū eſt: ſed ſi nō ſit mīmus ſit ergo ille l minor eo illas habēs: ⁊ eius partes ab illis denominate ſint m n o p. erunt ergo alternatim per octauam a b c d partes l denominate ab m n o p. nō erat ergo e minimus quē numerabant a b c d. nam l ponitur minor: quod eſt contra hypotheſim.

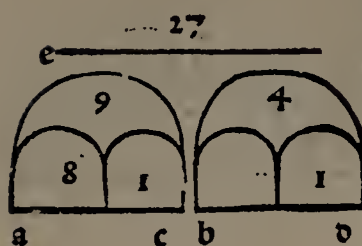
30 ¶ Sumptis duob⁹ numeris contra ſe primis quorū minore de maiori quoad poteſt detracto reſidua ſit vnitas: multiplicem cuiuſlibet eorum qui ſuper alterius multiplicem: ſolam apponat vnitatem reperire.



¶ Sint a b nūeri ꝯtra ſe ꝑmi: a maior b mīor: detractoq̄ b de a quoties pōt reliquať vnitas: ꝓpoſitū eſt dare mľtiplicē ad a: ſola vnitate multiplicē ad b ſuꝑantē. detraho ergo q̄tū poſſum b ꝑtiale de totali a et ſit totus detract⁹ a ꝑtialis: q̄ quidē eſt idē aut mľtiplex ad b. et ſit c relicta vnitas ⁊ addo ad b vnitatē q̄ ſit d. et duco a totū in b d ⁊ ꝓueniat e quē manifeſtū eſt eē multiplicē totalis a. Deīde duco







a partialē eundē sc3 aut multiplicē ad b in b d et ꝓueniat f k quē manifestū est ꝑ 23 primi eē multiplicē ad b ꝑtiale. Deinꝫ duco c vnitatē in b d et veniat k g q̄ qꝛ vnitas in quēcunqꝫ numeꝝ ducaꝝ illū ꝓducit est eq̄lis b d: sed b d supat b sola vnitate. ergo k g superat b sola vnitate. Hanc igiꝝ demo q̄ sit h g tūc aggregatꝰ f h est mltiplex ad b: sed aggregatꝰ f h superat totū f g sola vnitate h g. sed cū f g fiat ex ductu a partialis ⁊ c in b d equaꝝ e q̄ fit ex ductu a totalis in b d per decimā primi. at dictū est e eē multiplicē ad a ⁊ f h multiplicē ad b. igiꝝ e multiplex ad a equalis quidē f g supat f h multiplicē ad b sola vnitate qđ erat demōstrandū et propositū quo ad vnā partē. Sed rursum demōstrandū est dabilē esse multiplicē ad b q̄ solā h3 vnitatē super multiplicē ad a: aufero vnitatē ab b totali q̄ sit d et duco b partiale in totalē a et proueniat e manifestū est e eē multiplicē ad a. et duco iterū b partialē in a partiali equali aut multiplice totius b et proueniat f g manifestū est f g esse multiplicē ad totū b. deinde duco b d in c vnitatē ⁊ fiat g h qui qꝛ quicūqꝫ numerꝰ in vnitatē ducaꝝ seipsum ꝓducit g h est equalis toti b quare totus f h est mltiplex ad b. Sed cū per nonā primi qđ fit ex b ꝑtiali in a c equeꝝ ei q̄ fit ex eodē b partiali in a et in c: ⁊ ille q̄ fit ex b ꝑtiali in a: et b totali in c solā vnitatē superaddat illi q̄ fit ex b ꝑtiali in a et in c. seq̄tur ergo ꝙ multiplex ad b sc3 f h q̄ fit ex b partiali in a et b ꝑtiali in c: solā addet vnitatē super e multiplicē ad a qui fit ex b partiali in a c: quod est secundū et totum propositū.

¶ Propositis duobus numeris cōtra se primis: multiplicē cuiuslibet coꝝ inuestigare cuius ad multiplicē alterius differētia sit dato numero equalis. 31

g — 676
f — 672 c — 4
e — 169 b — 13
d — 168 a — 8

t — 676 r — 169
s — 672 q — 168
13 5 o — 65
a — d p — 13
8 3 n — 64
b — e 9 15
5 2 m — k
d — f l — 8
e — 3 25
f — 2 10 15
1 h — k
g — 5

¶ Sint a b duo nūeri contra se p̄mi quoꝝ cuiuslibet iubemur assignare multiplicē cuius dr̄ia ad multiplicē alterꝰ sit dato nūero q̄ sit c equalis. capio ꝑm exigentiā precedētis multiplicē a q̄ sit d et multiplicē b q̄ sit e addēs super multiplicē a solā vnitatē ⁊ multiplico d per c numeꝝ datū et proueniat f ⁊ e ꝑ eundē c et ꝓueniat g. ⁊ qꝛ tm̄ est c in e q̄tum c in d et vnitatē per nonā primi ⁊ oīs nūerus in vnitatē seip̄m producit. ergo dr̄ia g ad f est nūerus datus c. et cū a sit pars d et d ps f: ⁊ silr̄ b pars e ⁊ e pars g ergo ꝑ vicesimātertiā primi a est pars f et b ps g. quare f et g multiplices sunt ad a b int quos nūerus assignatꝰ est dr̄ia. et posses silr̄ ꝑ p̄cedentē capere multiplicē a q̄ supadderet vnitatē mltiplici ip̄ius b. deinde ꝓcedere vt dictū est. Ceterū si minor quoties pōt de maiore detractꝰ nō solā relinquat vnitatē sed vlterior fiat substractio quo minꝰ per p̄cedentē operari posses hoc mō poteris operari. Datis enī a b nūeris contra se p̄mis et c numero cui sit capiēda dr̄ia multipliciū equalis et detracto b ab a quoties pōt remaneat d et d detracto ab b quoties p̄t reliquꝰ sit e: ⁊ e detracto ab d quoties pōt maneat f et qꝛ tandē per decimāquintā huius relinq̄tur vnitas sit ergo vt detracto f ab e quoties poterit relinquaꝝ vnitas. si ergo multiplex a debet addere supra multiplicē b sumo alterū extremoꝝ qui est in situ ipari ab a vt f et sumaꝝ h multiplex eius q̄ addat vnū super multiplicē e ⁊ ī quo sit f ꝑm g ducaꝝqꝫ g in d et fiat h k q̄ addet super multiplicē e vnitatē: qm̄ g in d q̄tum in e vel eius multiplicē ⁊ in f. dempto ergo vno de h k remaneat m k vt sit m et vnitas equale h sitqꝫ e in m k ꝑm l q̄ ductus in b faciat n: cui addito vno fiat o quē numerabit d eadē rōne ⁊ sit vt scđm p q̄ ductus in a faciat r: qui silr̄ addit super multiplicē b qui sit q vnitatē. multiplico igiꝝ r et q per c numeꝝ datū et producātur s ⁊ t q̄ erunt multiplices b ⁊ a inꝝ se dr̄iā ꝑm c numeꝝ assignatū seruātes. Tertij elemētoꝝ arithmetices Jordani finis

1 2 4 8
a — — b c — — d

8 12 18 27
a — — b c — — d
2 3
e — f —
4

Si fuerint quotlibet numeri continue proportionales: duo et duo proximi erunt commensurabiles. 1

¶ Sint a b c d quotlibet nūeri continue proportiōales: dico a b esse cōmensurabiles. Itē ⁊ b c et c d. Si enī a nūeret b manifestū est a et b esse cōmensurabiles. et qꝛ q̄ proportio a ad b ea est b ad c ⁊ c ad d ideo b nūerabit c: et c nūerabit d. quare cōstabit propositū: a b: b c: c d: esse cōmensurabiles. at si a non nūerat b: qꝛ īpossibile est tūc a et b eē in sua proportione mīmos. nā si a et b essent in sua ꝓportione minimi essent ꝑ decimāoctauā tertij adinuicē primi: et per decimānona3 numerarēt quoslibet in sua proportione: ⁊ qꝛ q̄ proportio a ad b: ea est b ad c. a ergo nūeraret b p̄mus cōtra se primū qđ est ipossibile et etiā oppositū positi. nō erunt ergo a et b in sua ꝓportione mīmi. capiā ergo ꝑ vicesimātertia3 tertij e f mīmos in illa ꝓportione q̄ per decimānonā eiusdē numerabūt a b ꝑm eundē numerū equalꝝ vt ꝑm g: et consilr̄ b c et c d. sunt igiꝝ a b: b c: ⁊ c d adinuicē cōmensurabiles: quod est propositū.

16 24 36 54
a — — b c — — d
8 12 18
— f — g —
4 6
l — m —
2 3
h — k —
2
n —
4 9
o — p —
8 27
q — r —

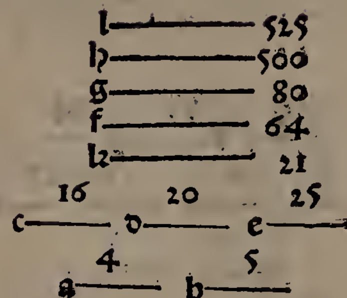
¶ Si nūeroꝝ cōtinue ꝓportionaliū duo extremi fuerint cōicantes erit nūerus cōiter oēs numerās maximusqꝫ q̄ oēs numerabit erit maximus extremos numerās. Ex hoc cōstat ꝙ si aliquot ꝓportionales inꝝ duos cōicantes ceciderit: totidē inter vtrūqꝫ eoꝝ et maximū numerū eos cōiter numerantē cadere necesse est. Palāqꝫ fit etiā maximos qui binos ⁊ binos numeroꝝ proportionaliū cōiter numerāt esse cōtinue ꝓportiōales 2

¶ Sint a b c d nūeri ꝯtinue ꝓportōales quoꝝ a d extremi sint cōicātes: dico p̄mo aliquē esse numerū eos oēs cōiter nūerantē. scđo maximū nūeꝝ oēs numerātē esse maximū numerantē extremos. Cū enī ꝑ p̄cedentē a b cōicent ⁊ silr̄ b c et c d: capio ꝑ 16 tertij maximū numeꝝ numerātē a b q̄ sit e: ⁊ maximū nūerantē b c q̄ sit f. et maximū nūerātē c d q̄ sit g. ponoqꝫ h k mīmos in ꝓportiōe a ad b et per 23 tertij et 19 eiusdē e f g numerabūt a b c ꝑm h: et g nūerabit d ꝑm k. sumo itē maximū numerantē e f q̄ sit l ⁊ maximū numerantē f g q̄ sit m: per vicesimātertiam tertij l nūerabit e ⁊ m f ꝑm h. et iterū l nūerabit f ꝑm k ⁊ m numerū g scđm k. per. 19. tertij et l ⁊ m sunt diuersi nūeri ab h k. nā si idē essent h in se produceret e ⁊ k in se produceret g ⁊ h in e producit a et k in g producit d ⁊ h k per. 18. tertij sunt contra se primi. erūt ergo a d per duodecimā tertii cōtra se primi qđ est contra hypothesim. sunt ergo l ⁊ m alii ab h k. qꝛ ergo h k numerāt l et m equaliꝝ: numerēt ergo ipsos scđ3 n q̄ per. 23. tertii est maximus eos

numerãs qui ⁊ idẽ n per .23. primi numerabit a b c d: qđ est primũ in ꝓpõne intentũ. Et per decimã septimã tertii n erit inuẽtus maxim⁹ numerus numerãs a b c d aliõqn ꝑ correlariũ 16 accidet maiorẽ numerꝝ numerare minorẽ. ⁊ qꝛ h denoĩat n in l ⁊ l in e: ergo ꝑ 23 primi nũerus q̃ fit ex h in se qui sit o denoĩat n in e. ⁊ qꝛ h etiã denoĩat e in a: ergo ꝑ eandẽ 23 numerus qui fit ex h in o q̃ sit q denominat n in a. et eadẽ rõne qꝛ k denoĩat n in m et m in g. ergo per vicesimã tertiã primi numer⁹ qui fit ex k in se qui sit p denoĩat n in g: et etiã qꝛ k denominat g in d: igitꝛ per eandẽ numerus q̃ fit ex k in p qui sit r denoĩat n in d. numerat igitur n numerũ a scđm q et numerũ d scđm r. et qꝛ h k sunt adinuicẽ primi: ergo per duodecimã tertii q et r sunt cõtra se primi: quare per vicesimã eiusdẽ in sua ꝓportione mĩmi. Per correlariũ igitur vicesimetertie eiusdẽ q et r numerabũt a ⁊ d scđm maximũ numerꝝ numerantẽ a et d. est igitur n maximus nũerus numeros a d extremos numerãs quod est secundũ. Primũ correlariũ hinc cognoscitꝛ. nam qꝛ idẽ numerus h in n l e: producit l e a. ergo per septimã primi a e l n erunt cõtinue ꝓportionales. ⁊ per idẽ qꝛ l in n m g producit m g d: ergo d g m n erũt continue ꝓportionales quare sicut inter a ⁊ d cadũt b c duo medii ꝓportionales silr̃ inter a ⁊ n cadũt duo e l. et inter d ⁊ n cadunt g m duo medii ꝓportionales scꝫ totidẽ medii ꝓportionales intꝛ duos cõicantes et totidem inter vtrũqꝫ eoꝝ et maximũ eos cõiter numerantẽ: qđ est primũ correlariũ. scđm vero hinc fit notũ. nam qꝛ per vicesimãtertiam tertii ⁊ decimãnonam h in e in f et in g ꝓducit a b c. ergo per septimam secundi a b c ⁊ e f g sunt cõtinue ꝓportionales: qđ est secundũ correlarium ⁊ ꝓpositũ.

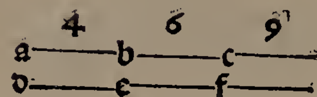
3 ¶ Numeros diuersarum ꝓportionũ sumere: quorum maximi cõmuniter binos et binos numerantes sint continue ꝓportionales.

¶ Sint a b nũeri contra se primi: a minor et b maior ⁊ a in se ꝓducat c et in b ꝓducat d ⁊ b in se producat e: per septimã secũdi q̃ ꝓportio a ad b ea est c ad d. et ꝑ octauã eiusdẽ iterũ que ꝓportio a ad b ea est d ad e. sunt ergo c d e cõtinue ꝓportiõales. duco ğ a in c et fiat f ⁊ in d ⁊ fiat g: eritqꝫ ꝑ septimã secũdi g ad f sicut d ad c. quare ⁊ sicut b ad a et qꝛ q̃ ꝓportio a ad b ea est c ad d: ergo per 25 secundi qđ fit ex a in d equũ est ei qđ fit ex b in c. at qđ fit ex a in d positũ est esse g. quod ergo fit ex b in c est g. et qđ fit ex c in a est f. ergo ꝑ correlariũ vicesimetertie tertii c est maxim⁹ numerus numerãs f g. Item duco d in e ⁊ ꝓueniat h: qꝛ ergo d in a ꝓducit g: ⁊ d in e ꝓducit h. ergo ꝑ septimã scđi q̃ ꝓportio e ad a ea est h ad g: et ꝓportio e ad a nõ est vt b ad a. nã e ⁊ b totũ scꝫ et pars equarentꝛ: quod est ĩpossibile. ergo ꝓportio h ad g nõ est ꝓportio g ad f. Itẽ qꝛ a b sunt cõtra se p̃mi et e producitꝛ ex b in se. igitꝛ e ꝑ vndecimã tertij est p̃mus ad a. sunt igitꝛ e ⁊ a in sua ꝓportione mĩmi. at d nũerat g scđm a ⁊ idẽ d nũerat h scđm e. igitꝛ ꝑ correlariũ vicesimetertie tertij d ẽ maxim⁹ nũerus numerãs g et h. sumo ergo k primũ ad d et maiorẽ d in alia quidẽ ꝓportione q̃ b ad a et q̃ e ad a: ⁊ duco ĩpm k in e et ꝓueniat l. qꝛ ergo e in d facit h et e in k facit l per septimã secũdi q̃ ꝓportio k ad d ea est l ad h. at ꝓportio k ad d posita est alia a ꝓportiõe b ad a et e ad a. ergo ẽ alia q̃ g ad f et h ad g. et qꝛ k d sunt ꝯtra se p̃mi ⁊ iõ in sua ꝓportione mĩmi ⁊ numerãt h l scđm e. est igitꝛ ꝑ idẽ correlariũ 23 tertij e maxim⁹ nũerus numerãs h et l. sũpti sunt igr̃ f g h l numeri diuersaꝝ ꝓportionũ quoꝝ maximi c d e binos ⁊ binos cõiter numerãtes sunt ꝯtinue ꝓportionales: quod est ꝓpositum.



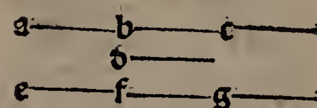
4 ¶ Si numeroꝝ continue ꝓportionalium duo extremi sunt contra se primi: erunt oẽs illi in suã ꝓportione minimi

¶ Sint a b c cõtinue ꝓportionales quoꝝ a ⁊ c sint cõtra se primi: dico tres nũeros a b c esse mĩmos in ꝓportione a ad b. nã si sint tres miores sint d e f: qꝛ ꝑ vicesimãprimã scđi et equã ꝓportionalitatẽ q̃ ꝓportio a ad c ea est d ad f et a ⁊ c ꝑ hypothesim sunt contra se primi. ergo ꝑ vicesimã tertij sunt in sua ꝓportione minimi. numerãt ergo numeri a c per decimãnonam eiusdẽ numeros d ⁊ f: maiores scꝫ minores quod est ĩpossibile.



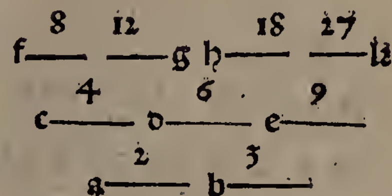
5 ¶ Si quotlibet nũeri fuerit in sua ꝓportiõe mĩmi: ipsoꝝ duo extremi erũt ꝯtra se p̃mi

¶ Hec est cõuersa p̃cedentis. Sint ergo a b c in sua ꝓportione minimi: dico a et c esse contra se p̃mos. Nã si a et c sint cõicantes erit nũerus aliq̃s idem ꝑ secundã hui⁹ eos oẽs cõiter numerãs q̃ sit d quos qꝛ a b c sunt tres nũeri inequales: nũerabit scđm tres diuersos nũeros. numeret ergo a scđm e ⁊ b scđm f et c scđm g: per septimã secundi e f g sunt in eadem ꝓportione cum a b c et cũ sint minores a b c vtpote q̃ sunt eorum partes nõ sunt igitur a b c dati minimi: quod est contra hypothesim.



6 ¶ Numeros quotlibet scđm datã ꝓportionẽ minimos inuestigare. Vñ manifestũ erit ex duoꝝ in aliqua ꝓportione minimoꝝ primo in ambos et scđo in se: tres. et ex eodẽ p̃mo in illos tres eodẽqꝫ scđo in tertiũ: quattuor ꝯtinuus enasci illius ꝓportionis minimos. q̃ si primũ hoc pacto in omnes ducere pergis et secundũ in vltimũ: quotquot libuerit in aliqua ꝓportione minimos efficies.

¶ Illius ꝓportionis mĩmi ꝑ vicesimãtertiã tertij reperiãtur q̃ sint a b: duco a in se ⁊ ꝓueniat c et a in b ⁊ ꝓueniat d et b in se et prouenĩat e per septimã ⁊ octauã scđi tres nũeri c d e erũt continue ꝓportionales et ꝑ duodecimã tertij extremi c e sunt cõtra se p̃mi quare per quartã hui⁹ illi tres nũeri sunt in sua ꝓportione mĩmi. Itẽ duco a in oẽs illos et prouenĩat f g h ⁊ b in e et ꝓueniat k ⁊ eadẽ rõne f g h k sunt cõtinue ꝓportionales et extremi f ⁊ k contra se p̃mi et illi q̃ttuor in sua ꝓportione mĩmi. et hoc processu quinqꝫ sex septẽ et quotquot voles reperiãtur. Correlariũ ex mõ demõstrationis cognitũ est.



7 ¶ Si numeri cõtinue ꝓportionales in sua ꝓportione fuerint mĩmi: quotcũqꝫ inter extremos fuerit medij totidẽ inter vtrũqꝫ extremoꝝ ⁊ vnitatẽ ꝓportiõales eẽ ꝯuenient

a 8 — 12 b c 18 — 27 d
e 4 — f 6 — g 9
h 2 — k 3

Sint a b c d nũeri cõtinue proportionales in sua ꝓportione mĩmi: dico quot fuerint medij cõtinue proportiõales inť a et d totidē esse medios ꝓportionales inť a ⁊ vnitatē et totidē inť d ⁊ vnitatē. nā qꝛ ꝑ primā huiꝰ q̄libet duo nũeri proximi erũt cõmēsurabiles sumo maxios binos ⁊ binos numerātes q̄ sint e f g qui ꝑ scđm correlariũ scđe huiꝰ erũt cõtinue proportionales ⁊ sumo maxios illoꝝ maximoꝝ duos et duos numerātes q̄ sint h k: eruntq; h k vt a ad b qꝛ ꝑ vicesimātertiā tertij numerāt e f et f g ꝓm mĩmos illius proportõis. at cũ e numeret a: et g nũeret d ⁊ sint a et d ꝑ quintā huiꝰ contra se ꝑmi erũt ergo e ⁊ g ꝑ octauā tertij contra se ꝑmi. et eadē rõne h ⁊ k sunt cõtra se ꝑmi. ideoq; in sua proportione mĩmi. ꝑ correlariũ igiť vicesimesextie tertij e nũerat a scđm h et h nũerat e scđm h. et itē g nũerat d ꝓm k et k g scđm k. quoties ergo ꝑ diffinitionē eius qđ est numerũ ꝑ aliũ multiplicari vnitas in h et h in e ⁊ e in a. et siĺr quoties vnitas in k toties k in g et g in d. sunt igiť vnitas h e a ꝯtinue proportiõales siĺr et vnitas k g d cõtinue proportiõales. q̄re sicut inť extremos a d ꝯtinētur b c duo medij proportionales. siĺr inť a et vnitatē ꝯtinētur duo e h et inter d et vnitatē itidē duo g et k medij proportionales: quod est propositũ.

Si inter vtrunq; duorũ numeroꝝ et vnitatē numeri proportionales equales nũero ceciderint: inter ipsos quoq; totidē cadere necesse est. 8

Hec est cõuersa p̄cedētis vt si inť vnitatē ⁊ a cadāt h et e duo nũeri cõtinue proportiõales et inť vnitatē ⁊ d cadant k g: totidē medij proportiõales dico inť a et d totidē cadere. Nā qꝛ quoties vnitas in h toties h in e. iõ h in se ductꝰ producet e ⁊ ꝑ idē k in se producet g et h ⁊ k ducti in e et g producũt a et d. duco ergo h in k et fiat f manifestũ erit ꝑ septimā et octauā scđi e f g in ꝯtinua proportiõe eē vt h ad k deinde duco h in f et fiat b ⁊ k in f et fiat c cõstabitq; ꝑ septimā scđi vt a ad b ita b ad c et c ad d cadent itaq; duo nũeri b et c medij proportiõales inť a et d queadmodũ cadebāt inter vnitatē ⁊ a et inter vnitatem et d: quod est propositũ.

e 24 — f 36 — g 54
a 8 — 12 b c 18 — 27 d
h 2 — k 3

Si fuerint quotlibet numeri continue proportionales: minimi quos duo et duo proximi numerant: in eadem proportione proportionales erunt. 9

Sint a b c d numeri ꝯtinue ꝓportiõales at vero mĩmi quos duo et duo proximi numerāt sint e f g dico e f g eē ꝯtinue proportiõales. sumo enī h k in illa proportiõe mĩmos ⁊ ꝑ 24 tertii a b c numerāt e f g ꝓm k. ⁊ b c d nũerāt eosdē ꝓm h. ergo ꝑ septimā ꝑmi e f g sũt ꝯtinue proportõales: qđ ē propositũ

l 75 — k 30 — h 12
g 25 — 15 f e 6 — 4 d
c 5
a 3 — b 2

Numeros diuersarum proportionum sumere: a quorum binis ⁊ binis numerati mĩnimi: sint continue proportionales. 10

Uolo sumē nũeros diuersaꝝ proportionũ a quoꝝ binis ⁊ binis mĩmi numerati sint proportiõales Capio a b nũeros cõtra se ꝑmos a quidē maiorē ⁊ b minorē quoꝝ cõpositus sit c q̄ cum vtroq; ꝑ nonā tertii ē primꝰ. et duco b in se et proueniat d et b in a ⁊ proueniat e et a in c et fiat f et c in se et fiat g: per septimā primi q̄ proportio a ad b ea ē e ad d et f ad e tanq̄ c ad b et c ē maius a ergo ꝑ nonā scđi maior est f ad e q̄ e ad d et g ad f vt c ad a que non est vt b ad a. nā c b essent eq̄les neq; vt a ad b. nā per primā huiꝰ qꝛ esset cõtinua proportionalitas c ad a et a ad b proīde c et a cõicarent. est itaq; proportio g ad f alia a proportiõe f ad e et e ad d. capio ergo minimũ quē numerāt d e q̄ sit h et mĩmũ quē numerāt e f. et sit k et minimũ quē numerāt f g et sit l. dico h k l esse cõtinue proportiõales. nam ꝑ 24 tertii b in e facit h. et qꝛ f ad e tanq̄ c ad b et c b sunt in sua proportiõe mĩmi ergo ꝑ eandem 24 b in f producit k est ergo k ad h vt f ad e quare vt c ad b. et qꝛ per idē c duciť in f ad producēdũ l. nā f est mĩor et g maior ergo ꝑ octauā scđi erit l ad k tanq̄ c ad b. nā b in f facit k et c in f facit l. sunt igiť l k h cõtinue proportionales mĩmi a binis et binis numeroꝝ diuersarũ proportionũ sumptoꝝ nũerati: qđ est propositũ

e 1728
k 432 — l 576
f 108 — g 144 — h 192
a 27 — 36 b c 48 — 64 d
m 3 — n 4

Si inter duos numeros quotlibet cõtinua proportionalitate sumātur: inter vtrũq; eorum et minimũ quem omnes numerāt totidem assignari necesse est. 11

Sint a b c d nũeri cõtinue proportiõales quoꝝ ꝑ 25 tertii e sit inuētus mĩmus quē numerāt: dico quot nũeri cõtinue proportiõales cadũt inť a et d: totidē cõtinue proportiõales cadere inť a et e et inť d et e. sint f g h mĩmi quos a b: b c: et c d bini et bini numerāt. erũt f g h ꝑ nonā huius cõtinue in eadē proportiõe a ad b ꝓportiõales. Itē mĩmi quos f g et g h bini et bini numerāt sint k l dico k eē mĩmũ quē numerāt a b c. nā si esset mĩor ꝑ correlarium 23 tertii f et g eundē numerarēt quare ⁊ ꝑ idē correlariũ k mĩmus ab eis numeratꝰ: maior scꝫ minorē qđ est impossibile. et eodē argumēto l est mĩmus quē numerāt b c d et ex eodē oñdetur mĩmũ quē numerāt k l eē minimũ quē numerāt a b c d. at mĩmꝰ quē numerāt a b c d positꝰ est e. igiť e est mĩmus quē numerāt k l. Sint ꝑterea m et n mĩmi proportionis a ad b: ergo ꝑ 24 tertii a numerat f et f k et k e ꝓm n ⁊ per idē d numerat h et h l et l e scđm m. quare ꝑ octauā scđi a f k e sunt cõtinue proportiõales. itē ⁊ d h l e: atq; sint inť a et d sunt b c duo medii proportionales: ita inter a et e sunt duo f k et inter d et e duo h l itidē medii proportionales: qđ est propositũ

Si primus ad secundũ sicut tertius ad quartũ quotcunq; inter primũ et secundum totidem inter tertium ⁊ quartum ꝓportionaliter medios cõsistere necesse est. 12

a 2 — b 4 — c 8 — d 16
e 3 — f 6 — g 12 — h 24
k 1 — l 2 — m 4 — n 8

Sit a ad d sicut e ad h: et inť a ⁊ d sint b c duo medij ꝓportiõales. dico etiā inť e ⁊ h eē duos medios ꝓportiõales. Sumo q̄tuor mĩmos illius ꝓportiõalitatis q̄ sint k l m n: ꝑ 21 secũdi et equā proportionalitatē k ad n sicut a ad d quare ⁊ sicut e ad h. et qꝛ per quintā p̄ntis k n sunt cõtra se ꝑmi erunt ꝑ 20 tertij in sua proportione mĩmi et ꝑ decimānonā eiusdē minimi k n numerabũt equaliť e ⁊ h. numerēt igiť numeri l m numeros f et g ꝓm eundē numerũ. et per septimā secundi e f g h erunt cõtinue proportionales. sunt igiť f g itidē duo medij proportionales inť e ⁊ h vt duo d c inť a ⁊ d: qđ est propositũ.

13 ¶ Numerorū continue proportionaliū si primus nō numeret secundū nō numerabit aliquis eorum vltimū. q si primus numeret vltimū numerabit et secundū.

¶ Sint a b c d numeri cōtinue proportionales et a nō numeret b: dico nullū eorū nūerare d. & certū est q sicut a ad b: ita c ad d. et a nō numerat b: c etiā non numerare d. at q b nō numeret d pz. capio enim e f g tres minimos proportionis a ad b. per equā enī proportionē que proportio e ad g: ea est b ad d. at e & g per quintā sunt cōtra se primi: ergo e nō numerat g: quare nec b numerabit d. si enī e numerat g ipm e esset vnitas. et cū que proportio e ad f: ea sit a ad b & e vnitas numeret f a etiā nūeraret b: qd est ctra hypothesim. et cōsimiliter probabis a nō numerare d acceptis quattuor minimis in illa proportione q sint h k l m. nā cum pmus nō sit vnitas (alioquī oēs numeraret & ita a oēs) prim⁹ & vltimus p quintā hui⁹ erūt contra se primi & prim⁹ h nō numerabit m: quare nec a numerabit d. vt enī h ad m: ita p equam proportionalitatē a ad d qd est primū. Scdm pz ex opposito ○ñtis hui⁹ vltimi mōstrati. Si enī a nō numerat b: etiam nō numerat d. vt monstratū est p primā partem: ergo ex opposito ○ñtis si a numerat d numerat & b: quod est secundum.

14 ¶ Si primus in tertio quoties vnitas in secundo: inter primū et tertium et inter vnitatem & secundū numeri proportionales numero equales inuenientur.

¶ Sint tres numeri a e d: a prim⁹: e secūdus: d tertius. et sit vt quoties a est in d: toties vnitas sit in e dico ergo quot numeri inter a & d cōtinue proportionales inueniūtur: totidē inter vnitatē & e reperiri. Reperiātur enī inť a & d duo nūeri b c cōtinue proportionales: qm enī a numerat d ergo p premissam a nūerabit b. vnitas ergo numeret f quoties a ē in b: itēq f numeret g quoties b nūerat c: nūeret etiā g toties quēcunq numerū. vt verbi cā h quoties c nūerat d: q ergo vt a ad b: ita vnitas ad f et vt b ad c. ita f ad g. et vt c ad d: ita g ad h. ergo p equā proportionalitatē vt a ad d: ita vnitas ad h. sed & vt a ad d ita & vnitas ad e. sunt ergo h & e idem numerus: quare inter vnitatē & e duo pariter numeri f et g reperiuntur medij proportionales vt inter a et d duo b & c: quod est propositum.

15 ¶ Si fuerint duo numeri contra se primi quotcūq inter alterū eorū et minimū quem numerāt: totidem inter reliquū & vnitatē proportionales reperiri cōtingit.

¶ Sint cōtra se primi a & e et minimus quē numerāt sit d: dico q si inť a et d cadūt b c duo medij ○tinue proportionales totidē cadē inter vnitatē & e: q a e sunt contra se primi. et ideo in sua proportione minimi et d est minimus quē numerāt: ergo p vicesimāquartā tertij a nūerat d secūdum e. est ergo toties a in d quoties vnitas in e: ergo per precedentē quot numeri inueniunť inter a & d primū & tertium: totidem continue proportionales inueniunť inter vnitatem & e secundū: quod est propositum.

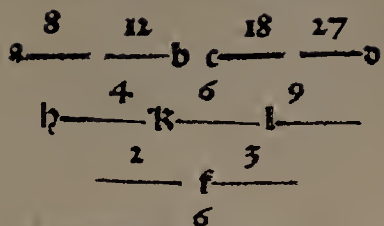
16 ¶ Si fuerit duo numeri cōicantes: quotcūq inter alterū eorū & maximū q eos nūerat totidē inter reliquū & minimū ab eis numeratū ○tinue proportionales ○sistere necēe est.

¶ Sint a b nūeri adinuicē ○mēsurabiles et c maxim⁹ eos numerās & d minimus ab eis numerat⁹: dico quot proportionales cadūt inter c et b: totidē cadere inter a & d. itē quot cadūt inter c & a: totidē cadere inť b & d. Sint enī e & f minimi in proportione a ad b: ergo p vicesimātertiā tertii e in c facit a. et per vicesimāquartā eiusdē e in b facit d: ergo p septimā scdi q proportio c ad b ea est a ad d. ergo p duodecimā hui⁹ quotcūq cadūt medij proportiōales inť c & b primū et scdm: totidē cadūt inť a & d tertiū et quartū et iterū q vt c ad b: ita a ad d. ergo ○mutatī c ad a vt b ad d: quare p eandē duodecimā quot medij proportionales cadēt inť c et a: totidē cadent inť b & d. manifestū est ergo quotcūq inter alterū eorū et maximū eos numerantē cadant: totidē inter reliquū & minimū ab eis numeratū cadere: qd est propositū.

17 ¶ Si ab vno principio duo ordines numerorū proportionaliū numero equaliū sumanť quotcunq inter primum et alterū extremorū: totidem inter extremos medii secūdum proportionem proximorum a primo proportionales erunt.

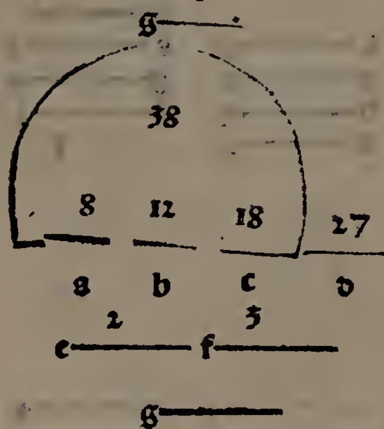
¶ Incipiat ab a ad d vnus ordo numerorū continue proportionaliū et ab eodē a ad g secundus & numero quidē equaliū: dico quot medij proportionales continebūtur inter a & d: totidem cōtineri inter d & g fm proportionē proximorū a primo. cōtineanť ergo b c medij proportionales inter a & d: & e f medij proportionales inť a & g: totidē cōtineri dictū est inter d g fm proportionē b e: qd ostendiť. Capio enī h k minimos proportionis b ad e & duco h in oēs illos et fiant l m n o ex vna parte: et ex altera pte fiant l p q r per septimā secundi l m n o sunt cōtinue proportionales: similiť et l p q r. et per eandē que proportio b ad e: ea est m ad p. Deinde duco k in a e & f et proueniant s t v: eruntq per septimā secundi s ad t & t ad v sicut l ad p: p ad q et q ad r. & per octauam eiusdem sicut h ad k: ita & l ad s. quare m ad p sicut l ad s. et q p fit ex h in e & t ex k in e: ideo per octauam secundi p ad t vt h ad k: quare vt m ad p. sunt igitur continue proportionales m p t. et q dictū ē vt s ad t & t ad v: ita l ad p: p ad q et q ad r. est ergo econuerso r ad q vt v ad t: ergo permutatim r ad v vt q ad t. & quia iterum q ad p vt t ad s: ergo permutatim q ad t vt p ad s: quare p ad s: q ad t et r ad v erunt in eadem proportione. & quia que proportio m ad l: ea est n ad m & o ad n: & m ad l probata est vt p ad s. ergo vt n ad m: ita q ad t. ergo permutatim que proportio n ad q: ea est m ad t. ergo per duodecimam huius cum inter m & t contineatur vnum medium proportionale scz p secundū proportionem m ad p: itidem continebiť vnum medium proportionale inter n q secundū proportionē m ad p qd sit x. & q q fit ex h in f & v ex k in f per octauā primi erit proportio q ad v vt h ad k: quare vt m ad p. sunt igitur n x q v continue proportionales fm

ꝓportionē m ad p. at rurſum cū que ꝓportio o ad n ea ſit r ad v. ergo ꝑmutati o ad r vt n ad v: ſed inꝭ n et v cōtinentur x q duo medij ꝓportionales ſm proportionē m ad p. ergo per duodecimā huius ſm eandē proportionē totidem cōtinebuntur medij inter o ⁊ r q̄ ſint y ʒ. at cū o fiat ex h in d et r ex h in g. ergo per ſeptimā ſecundi que ꝓportio o ad r ea eſt d ad g. ergo per duodecimā huius quot medij proportionales cōtinentur inter o et r ſm proportionē m ad p totidem continebūtur inter d et g. at duo medij y ʒ vt monſtratū eſt ſm proportionē m ad p ſiue b ad e qꝺ idem eſt continētur inter o et r. igitur et duo ſm eandē proportionē continentur inter d ⁊ g: qꝺ erat demonſtrandū.



¶ Si fuerint quotlibet numeri in ſua proportione minimi: quicunqꝫ aliquem illorum 18
numerat alteri terminorū illius proportionis erit cōmenſurabilis.

¶ Termini diffiniti ſunt q̄ in aliqua ꝓportione ſunt mīmi. Sint ergo a b c d quotlibet numeri ꝯtinue ꝓportionales in ſua ꝓportione minimi et ſint e f termini in ꝓportione a ad b et numeret g numerū a aut b aut c aut d: vt verbi cā c: dico g eſſe cōmenſurabilē e aut f. capio tres mīmos in ꝓportione a ad b per ſextā huius q̄ ſint h k l. qꝛ igitur ex correlario eiuſdē ſexte ex e in l fit c. ergo ꝑ quintā tertij g cōmunicabit cum e aut cum l. ſi cum e conſtat propoſitum. ſi autem cum l: qꝛ per idem correlarium ex f in ſe fit l per eandem quintam tertij cōmunicabit cum f: quod eſt propoſitum.



¶ Si fuerint quotlibet numeri in ſua proportione minimi: quilibet eorum ad compo 19
ſitum ex reliquis erit primus.

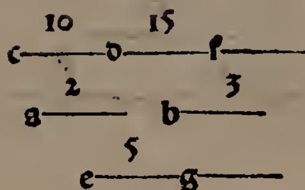
¶ Sint a b c d quotlibet numeri continue ꝓportionales in ſua ꝓportione minimi. e f vero termī proportionis a ad b. dico ꝯpoſitū ex a b c eſſe primū ad d. Nam ſi aliquis numeraret ꝯpoſitū ex a b c et d. ergo ꝑ precedentē cōicabit cum e aut f erit ergo aliq̄s numerus cōiter numerās e aut f. et compoſitū ex a b c et d q̄ ſit g: qꝛ ergo g numerat e aut f et ꝯpoſitum ex a b c et numerū d et vterqꝫ e ⁊ f numerat b et c per decimānonā tertij. ergo per viceſimātertiā primi g numerabit b et c. ergo et g per quintā ſcdī numerabit a reſiduū: ſed g poſitus eſt etiā numerare d: et a ⁊ d per quintā huius ſunt contra ſe primi igitur g numerat contra ſe primos qꝺ eſt impoſſibile. nō ergo cōpoſitus ex a b c eſt cōpoſitus ad d ſed neceſſario primus: quod eſt propoſitū. et ita de quolibet alio ad cōpoſitum ex reliquis argumētare

¶ Si quotlibet numeri fuerint in ſua proportione minimi: qui ex omnibus compo= 20
nitur ad quemlibet eorum erit primus.

¶ Hoc ideo eſt ꝙ numerus cōpoſitus ex duobus contra ſe primis ad quēlibet eorū per nonam tertij eſt primus. at ꝑ precedētem quilibet numeroꝝ in ſua ꝓportione minimorū ad compoſitū ex reliquis eſt primus: ergo cōpoſitus ex illis per eandē nonam ad quēlibet illorum numerorū et compoſitū ex reliquis eſt primus. quare ad quēlibet illorum erit primus: quod eſt propoſitum.

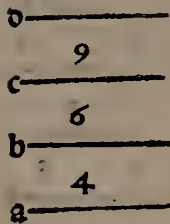
¶ Si fuerint duo numeri contra ſe primi: tertium eis in continua proportionalitate 21
adiungi eſt impoſſibile.

¶ Nam ſi tertius eis in cōtinua ꝓportionalitate adiūgeretur: ergo per primā huius primus ⁊ ſcdꝰ erunt cōmenſurabiles: quare nō erunt contra ſe primi quod eſt contra hypotheſim ⁊ propoſitū.



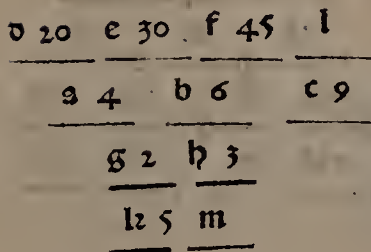
¶ Si duo numeri contra ſe primi numerent alios duos ſm numerū a neutro eorum 22
numeratum: illis quoqꝫ in continua proportionalitate non adiungetur tertius.

¶ Sint a b numeri contra ſe primi ⁊ e numerus neqꝫ ab a neqꝫ ab b numeratus ſm quē a numeret c et b numeret d: dico non eſſe numerū in continua ꝓportionalitate numeris c et d adiungendū. Si enī ſit aliquis eſto ille f: qꝛ per octauā ſecūdi ꝓportio c ad d vt a ad b erit: ergo d ad f vt a ad b. et a b ſunt contra ſe primi quare per viceſimā tertij ſunt in ſua ꝓportione minimi ⁊ per decimānonam eiuſdem quoties a numerat d toties b numerat f. ſit ergo vt equaliꝭ numerēt ſm g: cum itaqꝫ b numeret d ſm e ⁊ f ſm g. ergo per ſeptimā ſecundi q̄ proportio d ad f: ea eſt e ad g. quare ⁊ q̄ a ad b: ea eſt e ad g. et a b ꝓbati ſunt in illa ꝓportione mīmi. igitur ꝑ decimānonam ſecūdi a b numerāt e g equaliꝭ. numerabit igiꝭ alter numeroꝝ a aut b numerū e: quod eſt contra hypotheſim.



¶ Si numeri proportionales fuerint in ſua proportione minimi: non erit extremi ad 23
aliquem proportio que primi ad ſecundum.

¶ Sint a b c continue ꝓportionales in ſua ꝓportione mīmi: dico c ad nullū eſſe ꝓportionē q̄ a ad b. Si enī ſit aliq̄s eſto ille d. qꝛ ergo a ad b ſicut c ad d: ergo ꝑmutatī a ad c ſicut b ad d. ⁊ qꝛ a b c ſunt in ſua ꝓportione mīmi: ergo ꝑ quintā huiꝰ a c ſunt cōtra ſe ꝑmi. quare ꝑ viceſimā tertij in ſua ꝓportiōe mīmi quare ꝑ decimānonā eiuſdē a nūerabit b: ⁊ c nūerabit d equalr̄. at ſi a nūerat b: etiā b nūerat c. nam eadem ꝓportio quare per viceſimātertiam primi ⁊ a numerabit c: verūtamen a c erant contra ſe primi. hoc igitur impoſſibile ⁊ propoſitum.



¶ Si quotlibet numeri in ſua proportione minimi totidē alios numerēt ſm numerū 24
a neutro illius proportionis numeratū: nō erit alius cum illis cōtinue ꝓportionalis.

¶ Sint a b c nūeri ꝯtinue ꝓportionales in ſua ꝓportione minimi q̄ numerēt totidē d e f ſm k q̄ neqꝫ numereꝭ ab g neqꝫ ab h in ꝓportione a ad b mīmis: dico ꝙ d e f nō eſt adiūgendꝰ aliq̄s cū illis ꝯtinue ꝓportionalis. Si enī fuerit aliq̄s ſit l q̄ adiūgaꝭ poſt f: nūerabunt ergo a b c tres mīmi tres vltimos illius ꝓportiōis e f l equalr̄: ſitqꝫ id ſm m. ⁊ qꝛ c numerat f ſm k ⁊ l ſm m: ꝑ ſeptimā ergo ſcdī k ad m ſicut f ad l: quare ⁊ ſicut g ad h per decimānonam. ergo tertij g h in illa ꝓportione minimi nūerabunt k m equaliter: qꝺ eſt contra hypotheſim. poſitū enī erat neqꝫ g neqꝫ h numerare k.

25 ℂSi sumantur numeri ab vnitate cōtinue proportionales: nullus eorum numerabit vltimum nisi ſm aliquem in illa serie dispositorum.

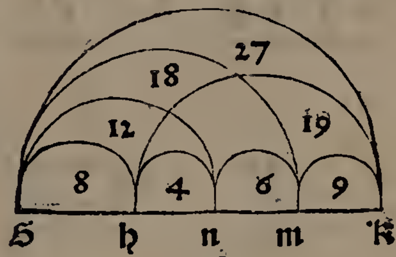
ℂSint a b c d e f numeri cōtinue ꝓportiōales ab vnitate: dico nullū eoꝝ numerare f / nisi ſm aliquē in illo ordine positoꝝ. nam qꝛ quoties vnitas in a toties e in f: ergo per diffinitionem e numerat f ſcđꝫ a. Item qꝛ vt vnitas ad a: ita d ad e. et vt a ad b: ita e ad f. ergo per equā ꝓportionalitatem vt vnitas ad b ita d ad f. quoties ergo vnitas in b: toties d in f. per diffinitionē igiẜ d nūerat f ſcđm b. et qꝛ iteꝝ per equā ꝓportionalitatem per vicesimamprimā secundi vt vnitas ad c: ita c ad f. quoties ergo vnitas in c toties c in f: quare c numerat f ſcđm se. et qꝛ mōstratus est d numerare f ſcđm b: ergo alternatim per octauam primi b numerat f ſcđm d. et qꝛ etiā e mōstratus est nūerare f ſcđm a: alternatim a nūerabit f ſcđm e. est itaqꝫ ostensum a b c d e numerare f vltim ſm aliquē in illo ordie positoꝝ. qđ erat ꝓpositū.

26 ℂSi numerorum ab vnitate continue proportionaliū secundus ab vnitate fuerit numerus primus: nullus numerabit vltimū nisi aliquis in ordine antecedentiū.

ℂSint a b c d numeri ꝯtinue ab vnitate ꝓportiōales: et a numerus p̄mus. dico ꝙ nullus numerabit d: nisi aliqs precedentiū d in ordine numeroꝝ a b c d. Si enī aliqs aliūs numeret d sit e qui nūeret eū ſcđm f. qꝛ ergo a nūerus p̄mus nūerat d ꝓductū ex e in f: ergo ꝑ quartā tertij a nūerat e aut f. sit ergo vt numeret e intelligo q̄ttuor nūeros: a / e / f / c: et qꝛ per precedētem a in c extremus in extremū ꝓducit d. et eūdē ꝓducit e in f medius in mediū. ergo per vicesimāquintam ſcđi vt a ad e: ita f ad c: ſꝫ a nūerat e: ergo et f numerat c. numeret ergo f nūerū c ſcđm g: eadē rōne f vel g nūerabit b: sitqꝫ id ſcđꝫ h. ꝑ idē quoqꝫ tandē ꝯcludes g aut h nūerare a: q̄re a non ē nūerus p̄mus. qđ ē ꝯtra hypothesim. at si g aut h ponaẜ eq̄lis a: argumētaberis ꝑ p̄missam reliquos eē equales iis qui sunt in ordie a b c d: et ꝓpositū.

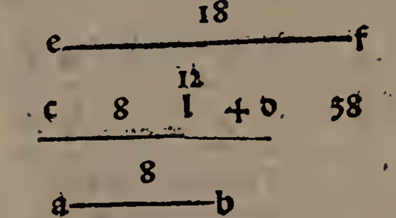
27 ℂNumeris ab vnitate proportionalibus si aliquis primus vltimum numeret: secundum quoqꝫ ab vnitate numerabit.

ℂSint a b c d ꝯtinue ꝓportiōales ab vnitate: sitqꝫ e numerus primus qui nūeret d, vltim: dico ipm e numerare a ſcđm ab vnitate. Si enī e primus non nūerat a: ergo ꝑ primā tertij e erit primus ad a. et cū quoties vnitas in a toties a sit in b: ergo a ſcđm se numerat b. quare per vndecimā tertij b est p̄mꝰ ad e. et cū quoties vnitas in a toties b sit in c: ſꝫ b nūerat c ſecūdū a. quare per decimā tertij e est p̄mus ad c. et iteꝝ quoties vnitas in a toties c in d: ergo c numerat d ſecūdum a. per eādem ergo decimam: e est primus ad d. non ergo e numerat d. quod est oppositum positi.

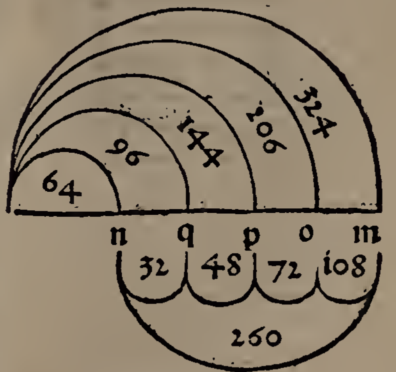


28 ℂSi numerorum continue proportionalium primus de secundo et vltimo tollatur: que proportio fuerit residui secundi ad primū ea est residui vltimi ad cōpositum oīm precedentium.

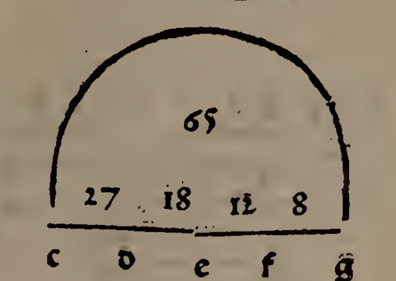
ℂSint a. b. c. d. e. f. et g k: numeri ꝯtinue ꝓportiōales ⁊ detrahaẜ a b primus de c d secūdo: sitqꝫ residuus secūdi l d. Itē detrahaẜ a b de vltimo g k / sitqꝫ residuus h k. dico que ꝓportio l d ad a b: eā esse h k ad ꝯpositū ex a. b. c. d. et e f. sumo enī ex g k nūeꝝ g m equalē e f / ⁊ g n equalē c d. et intelligo g k. g m. et g n. vt tria tota. qꝛ ergo g m equaẜ e f: que proportio g k ad e f: ea est totius g k ad totū g m. et qꝛ g n equaẜ c d: ideo que ꝓportio e f ad c d: ea est totius g m ad totū g n. et per idem q̄ ꝓportio c d ad a b: ea est g n ad g h. et vltra q̄ ꝓportio totius g k ad totū g m: ea est g m detracti g k ad g n detractum g m / ꝙ numeri g. k. e. f ⁊ c. d positi: sint ꝯtinue ꝓportiōales. et q̄ ꝓportio totiꝰ g m ad totū g n: ea est g n detracti g m ad g h detractū g n. quare ꝑ quintā ſcđi m k ad n m / ⁊ n m ad h n residuoꝝ ad residua vt totoꝝ ad tota: id est m k ad n m: sicut e f ad c d. et n m ad h n sicut c d ad a b. ergo ꝑmutatim per tertiā secūdi sicut m k ad e f: ita n m ad c d et h n ad a b: ergo ꝑ vicesimam secūdi h n m k sit qui sūt h k: ad h positū ex e f c d et a b: sicut h n vnius illoꝝ ad a b vnum hoꝝ. at cū g n equetur c d et g h equetur a b: ergo g h equabitur c l. equaẜ ergo h n nūero l d. ablatis enī equalibus ab equalibus: residua sūt equalia. q̄re ergo que proportio l d ad a b: ea erit h k ad ꝯpositū ex oībus precedētibus. qđ est propositum.



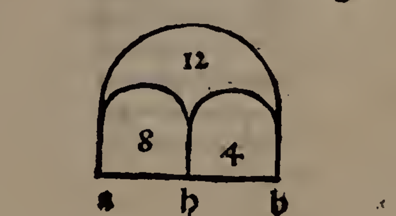
29 ℂPropositis duobus numeris / sumptisqꝫ quotlibet ſcđm proportionem eoꝝ ꝓportionalibus: si minor in minorem ⁊ maior in maiorem ducatur ⁊ ꝓductorum differentia per differētiam ꝓpositoꝝ diuidatur: exibit numerus qui ex omnibus aliis coaceruaẜ.



ℂSint a b et a h duo numeri et h b eoꝝ differētia: et sint c d / d e / e f / et f g: quotlibet in ꝯtinuā ꝓportione a b ad a h: ducaturqꝫ a b in c d ⁊ ꝓueniat l m. item a h in f g ⁊ ꝓueniat l n: sitqꝫ differentia l m ⁊ l n numerus n m. dico ꝙ si n m diuidatur ꝑ h b: differētiam primi ad ſcđm ꝓuenire c g numeꝝ ex c d e f g cōpositum. Nam ex a b in d e fiat l o et in e f fiat l p et in f g fiat l q. qꝛ per decimā primi qđ fit ex ductu a b in f g: equū est ei quod fit ex ductu a h ⁊ h b in eūdē nūerū f g: et ex a b in f g fit l q: et ex a h in eūdē fit l n. ergo ex h b in f g per eādem decimā fit n q. Preterea intelligo quattuor numeros: a b primum / a h secūdū / e f tertiū / et f g quartū. et qꝛ q̄ proportio primi ad ſcđm ea est tertij ad quartū: ſꝫ ꝑ vicesimā quintam secūdi quod fit ex ductu a b in f g primi in vltimū: equū est ei qui fit ex a h in e f medio in medium. at quod fit ex a b in f g est l q: ergo quod fit ex a h in e f est l q. at vo qđ fit ex toto a b in e f est l p: ergo per decimam primi quod fit ex h b in e f est q p. Et eadē ꝯsimiliqꝫ argumētatione: quod fit ex h b in d e est p o: et in c d est o m. quare per nonam primi h b in toto c g producit n m. ergo per sextam petitionem primi si productus n m diuidatur per eūdem numerū h b: redibit prior numerus c g. qđ erat demonstrandum.



ℂQuarti elementorum Arithmetices Jordani finis.



Omnis ꝓportio sup aliā quālibet addere ꝓportionem dicit̄: que cū illa ꝯti-
o nuata ipam componit. differētia ꝓportiōis ad aliam: vocatur illa ꝓportio
qua eadem supra reliquam abundare dicitur.

Quod addit ꝓportio primi ad scdm sup ꝓportionē tertii ad quartū: est 1
ꝓportio que est inter ꝓductum ex primo in quartum ⁊ ꝓductū ex secūdo in tertium.

e 6 f 4 g 3
a 2 b 1 c 4 d 3

Hec docet substrahere ꝓportionē a ꝓportione: et q̄ / quātaq₃ proportio minore proportiōe a maiore substracta relicta sit: quā hic dr̄iam proportiōis a ꝓportiōe noīamus. Sint quattuor numeri: a p̄m⁹ / b secūdus / c tertius / d quartus: et sit maior proportio a ad b q̃ c ad d / et ex a in d fiat e: et ex b in c fiat f. Dico ꝓportiōem quā addit a ad b sup proportiōem c ad d: eā esse q̄ est inter e et f. duco eni₃ iter̄ b in d ⁊ fiat g. qr eni b in c facit f / ⁊ in d facit g: ergo p septimā secūdi q̄ proportio c ad d: ea est f ad g. et quia a in d facit e: et b in d facit g: ergo per octauā scdi e ad g vt a ad b. Et qr posita est a ad b maior ꝓportio q̃ c ad d: ē ergo ⁊ e ad g maior ꝓportio q̃ f ad g. quare p nonā secūdi e maior est q̃ f. est itaq₃ ex diffinitione ꝓportiōis ꝯposite ex scdo huius habita ꝓportio e ad g ꝯposita ex ꝓportionibus e ad f et f ad g. addit ergo ꝓportio e ad g ꝓportiōem e ad f: sup ꝓportionē f ad g. quare ⁊ ꝓportio a ad b eādē ꝓportionem e ad f addit sup proportionem c ad d. quod est propositū. Id tn̄ aīaduerti dignū est si semel minore proportione de maiore substracta relicta sit differentia ꝓportio maior: iter̄ ab ea demat̄ mior et id toties fiat q̄usq₃ relicta sit aut substracte equalis aut ea minor. sicq₃ cognoscere p̄ōptū erit q̄ties proportio minor fuerit in maiore et quā insup superaddet minorem: si vltra supaddat.

Quo abundat proportio primi ad scdm super proportionem tertii ad quartum: eo 2
abundat proportio primi ad tertium sup ꝓportionē scdi ad quartum. Itēq₃ ꝓportio
quarti ad tertium super proportionem secundi ad primum.

e 6 f 4 g 12
a 2 c 4 b 1 d 3
e 6 f 4 g 8
d 3 c 4 b 1 a 3

Sit eadem hypotesis q̄ prius: dico p̄mo qua ꝓportiōe vt e ad f abūdat proportio a ad b sup ꝓportionem c ad d: eadē ꝓportiōe abūdare a ad c sup ꝓportionē b ad d. Scdo eade₃ q̄q₃ ꝓportione abūdare d ad c sup ꝓportionē b ad a. Primū patet: nā qr a ad b primi ad scdm maior ē ꝓportio q̃ c ad d tertij ad quartum. ergo p duodecimam secūdi maior est proportio a ad c primi ad tertiū: q̃ b ad d secūdi ad quartum. fac ergo a primum / c scdm / b tertiū / d quartum: et argumentare per precedentem ⁊ videbis propositum. Scdm similiter patet: nam quia a ad b maior q̃ c ad d: ergo per vndecimā secūdi erit d ad c maior q̃ b ad a. fac ergo d primum / c secūdum / b tertium / a quartū: ⁊ argumentare per precedētem: et facile videbis propositum.

Si addat aliqua ꝓportio super alteram q̃tum tertia sup quartam: erit vt cōposita 3
ex prima ⁊ quarta composite ex reliquis sit equalis.

e——3 f——4 g——3
a——2 b——1
c——4 d——3

a 2 c 4 e 4 g 8
b 1 d 3 f 2 h 6
l—— 16
k—— 8
m—— 6
n——64
q——48
o——32
p——24

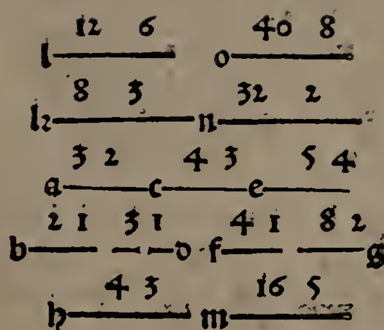
Priusq̃ ad ꝓpositū demōstrandū veniamus: volo demōstrare quo pacto proportio ꝓportiōi addēda sit: et dico ꝓportiōem ꝓductoꝝ ex p̄mo terio vni⁹ proportiōis in primū alt̄ius: ⁊ ex secūdo in scdm eē ex duabus illis ꝓportiōibus ꝯpositā. Sint eni a ad b et c ad d due ꝓportiōes: quas volo sit̄ addere atq₃ ex ipsis ꝯpositā ꝯflare. duco c in a ⁊ ꝓueniat e: et d in b ⁊ ꝓueniat g. dico proportionem e ad g: eē ꝯpositā ex ꝓportiōibus a ad b ⁊ c ad d. duco eni iter̄ c in b ⁊ ꝓueniat f: et per septimam scdi q̄ ꝓportio a ad b: ea est e ad f. et per octauam eiusdem q̄ ꝓportio c ad d: ea ē f ad g. et ꝓportio e ad g ꝯponitur ex proportiōibus e ad f ⁊ f ad g. quare ⁊ ex proportiōibus a ad b: ⁊ c ad d: quod intēdebatur. Nunc ergo ad demōstrādum ꝓpositū veniamus. Sit ergo vt q̃tū proportio a ad b addit sup ꝓportionē c ad d tm̄ addat proportio e ad f sup ꝓportionē g ad h. dico ergo proportiōem ꝯpositā ex proportiōibus a ad b ⁊ g ad h: eē equalē proportioni ꝯposite ex proportiōibus c ad d ⁊ e ad f. duco eni g in a ⁊ in b et fiant l k et b in h et fiat m: per septimā ergo p̄mi l ad k sicut a ad b. et qr b in g facit k et in h facit m: per eādem k ad m sicut g ad h. quare erit proportio l ad m ꝯposita ex ꝓportiōibus a ad b et g ad h pria sc₃ ⁊ vltia. Deiñ duco c in l / in k / ⁊ in m: et ꝓueniāt n / o / p: qui p septimā secūdi erūt proportiōales t̄ni ꝓportiōes l. k. m. qr ergo n ad o sicut l ad k: et o ad p sicut k ad m: ergo per equā proportiōalitatem n ad p sicut l ad m. quare equales sunt proportiōes l ad m ⁊ n ad p. deiñ duco d in l ⁊ ꝓueniat q. qr ergo n fit ex c in l ⁊ q ex d in l: per octauam ergo secūdi est n ad q sicut c ad d. Itē qr l ad k sicut a ad b: addet l ad k sup proportiōem c ad d q̃tū a ad b addit sup eādem proportionem c ad d. Intelligo ergo q̄ttuor numeros l / k / c / d. et quia l in d facit q: ⁊ k in d facit o vt mōstratū est: ergo p primā huius q ad o est q̄d addit a ad b sup proportionem c ad d. et qr eādem proportiōem addit e ad f sup g ad h: addit ḡ e ad f ꝓportiōem q ad o sup ꝓportionem g ad h. at proportio o ad p est vt g ad h / et q ad o est q̄d addit e ad f sup g ad h: ergo q ad p ꝯstās ex q ad o: et o ad p equat̄ ꝓportioni e ad f. et n ad q vt dictū est equat̄ c ad d: ⁊ n ad p equat̄ l ad m ꝯposite ex p̄ma ⁊ vltia. et n ad p ꝯstituit̄ ex scda ⁊ tertia. sic itaq₃ ꝯstructū est propositum

Si inequales ꝓportiones vni addātur: erit additaꝝ ⁊ ꝯpositarū eadem dr̄ia. 4

p 24 q 6 r 20 s 8
a——4 c——6 e——5
b——2 d——3 f——4
g——24
h——12
k——6
l——120
m——60
o——48
n——30

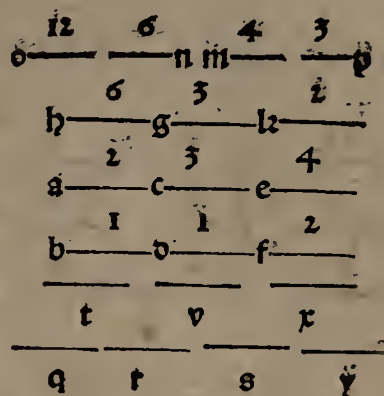
Sit a ad b quecūq₃ proportio: sintq₃ c ad d ⁊ e ad f due ꝓportiōes inequales vt c ad d maior / ⁊ e ad f minor: addat̄q₃ proportio c ad d proportioni a ad b: sitq₃ ꝯposita ꝓportio p ad q. addat̄ item ꝓportio e ad f eidem proportioni a ad b ⁊ proueniat ꝯposita r ad s: dico eādem eē differētiā proportionis p ad q ad proportionem r ad s q̄ est proportiōis c ad d ad proportiōem e ad f. duco eni c in a ⁊ in b ⁊ proueniat g h: et b in d ⁊ proueniat k. per septimam secūdi erit proportio g ad h vt a ad b: et h ad k vt c ad d quare proportio g ad k est ꝯposita ex proportiōib⁹ a ad b ⁊ c ad d: atq₃ eade₃ proportioni p ad q. duco item e in g / in h / et in k: et proueniāt l / m / n proportiōales per septimam secundi g h k. et duco f in h et

proueniat o.erit eni l ad m ſicut g ad h:quare ſicut a ad b.et qꝛ e in h producit m:ꝛ f in h producit o:g per octauam ſecūdi q̄ proportio e ad f:eadē eſt m ad o.quare proportio l ad o cōpoſita ē ex proportiōe a ad b et e ad f.atq̄ eadem proportiōi r ad s.at qꝛ l ad n et g ad k et p ad q equātur:et ſilr l ad o ꝛ r ad s adinuicem equātur:et l ad n ſuperat l ad o proportiōe o ad n.erit o ad n dr̄ia p ad q:et r ad s proportionum ꝯpoſitarꝫ.at cū m ad n equetur c ad d:et m ad o equetur proportioni e ad f vt hec oīa mōſtrata ſunt:ꝛ proportio m ad n ſupet proportionem m ad o in proportione o ad n.erit ergo eadem proportio o ad n differētia c ad d et e ad f proportionum ſcꝫ additarꝫ et ꝯpoſitarꝫ.quod eſt propoſitum.



5 ¶Proportiones minores minoribus ſiue eq̄lib⁹ addite: minorē ꝓportionē ꝯſtituūt.

¶Sit a proportio minor b:et c minor d:et e mīor f.dico proportionem ꝯpoſitā ex a c mīorem eē proportione ꝯpoſita ex b et c et proportiōem ex c e mīorem eē proportiōe ex d e.ſit itē proportio g equalis proportioni f.dico proportionem ex e g:minorem eē proportiōe ex f g.Primū pꝫ:nam cū proportiōes a b ſint inequales ꝛ b ſit maior a.ſit ergo h differētia qua abūdat b ſup a:et proportio ex b addita c ſit k et ex a addita c ſit l:per p̄cedentē eadē erit dr̄ia k ad l et b ad a.ſed b eſt maior a in proportiōe h:igit̄ et k maior l in eadē proportiōe.et eadērōe mōſtrabis proportiōem ꝯpoſitā ex d e maiorem eē proportione ꝯpoſita ex c e.qđ eſt p̄mū.Scđm ꝑ idē pꝫ:nā q̄ f maior ē e ſit m differētia f ad e.ꝛ ꝯpoſita ex f g ſit n:et ex e g ſit o.per p̄cedētem eadem eſt differentia f ad e et n ad o:ſed f maior eſt e in proportiōe m igit̄ et n proportio ꝯpoſita ex f g:maior ē proportiōe o ꝯpoſita ex e g:in eadē proportiōe m.qđ ē ſcđm.



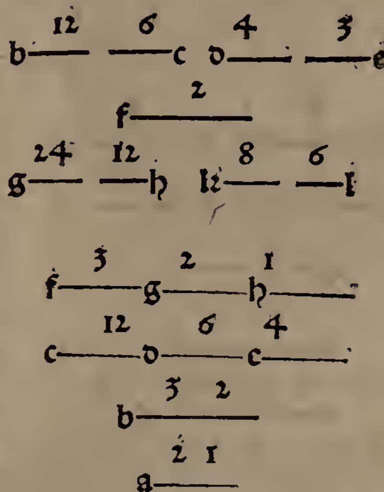
6 ¶Datas proportiones:in minimis terminis cōtinuare.

¶Sint a ad b.c ad d.et e ad f:date proportiōes in mīmis terminis:quas in proportiōalitate ꝯtinuā in mīmis numeris aſſignare iubemur.capio mīmū quē nūerāt b c qui ſit g.et quoties b ē in g:toties ſit a in h.et per ſeptimā ſecūdi tunc q̄ proportio a ad b:ea eſt h ad g.et quoties c eſt in g:toties ſit d in k.per eādem ſeptimam eadē erit proportio c ad d et g ad k.erūt ergo due ꝓportiōes a ad b ꝛ c ad d in ꝯtinua ꝓportiōalitate in numeris h g k:et etiā in mīmis numeris.nā ſi in mīoribus eē poſſint ꝯtinue ſit ergo vt in t v x.per decimānonam tertij b ſiliter ꝛ c nūerabit v.quare ꝛ ꝑ correlariūviceſimequarte tertij g mīm⁹ab eis nūeratus etiā numerabit v.nō ſunt igit̄ t v x mīmi hoc pacto ꝯtinuati vt ponebat̄. et ſi e numeraret aliq̄ties k: caperem l quem ſm eūdē numeraret f.quare ꝑ ſeptimā ſecūdi q̄ ꝓportio eēt f ad e:eadem eēt k ad l:ſicq̄ addita eēt tertia ꝓportio in ꝯtinua ꝓportionalitate ꝛ in mīmis terīs In mīmis quidē ꝓpter cauſam īmediate adductā.at qꝛ b e non nūerat k:capio mīmum numerū quē numerant e ꝛ k qui ſit m.et quoties k eſt in m ſcđm eūdē numerum ſit g in n et h in o. Item quoties e eſt in m toties ſcđmq̄ eūdē numerum ſit f in p.ꝛ per ſeptimam ſecūdi erit o ad n ſicut h ad g.q̄re ſicut a ad b.et n ad m:ſicut c ad d.et m ad p:ſicut e ad f.q̄re tres ꝓportiōes date ſunt in ꝯtinua ꝓportiōalitate in numeris o ad n/n ad m/et m ad p.et etiā in mīmis numeris.nā ſi aſſignarētur minores:vt q r ſ y:per decimānonam ſecūdi b ꝛ c numerarent r.ergo g mīnus ab eis nūeratus ꝑ correlarium viceſime quarte tertij etiā numerat r.et cū que ꝓportio g ad k ea ſit r ad s:ergo ꝑmutatim que ꝓportio g ad r ea eſt k ad s.ſed g numerat r:ergo k numerat s.et etiaꝫ per decimānonam tertij e numerat s.quare ꝛ m mīnus ab eis nūeratus ꝑ correlariū viceſimequarte tertij numerabit s.nō ſunt igit̄ q/r/s/y mīmi: illas ꝓportiones ꝯtinue retinētes:vt ꝓponebat̄.quare nulli tales erūt:p̄ter o n m p.qđ eſt ꝓpoſitum.



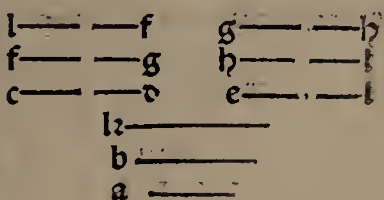
7 ¶Numerum propoſitum per partes inequales ſm aſſignatas ꝓportiones continue ſumptas:diuidere.

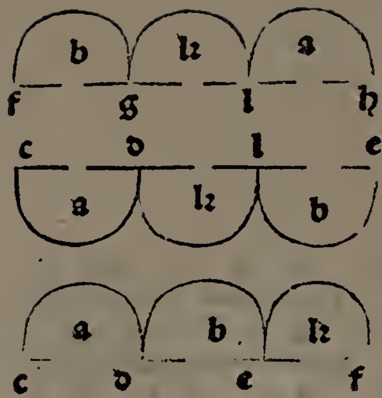
¶Numerus datus is eē debet qui per numerum proportiōes aſſignatas in mīmis ꝯtinentem diuidi poſſit:alioquin in eo partes aſſignatis proportiōibus rñdētes inuenire eēt impoſſibile. Sit ergo tl̄is nūerus datus a:quē ꝓpoſitum eſt diuidere in quattuor ptes inequales:quarꝫ pria ad ſcđam ſit dupla ſcđa ad tertiam ſeſqualt̄a/et tertia ad quartam ſeſquit̄tia.ꝯtinuo per precedētem tres aſſignatas ꝓportiones ſcꝫ duplam/ſeſqualterā/ꝛ ſeſquitertiā in mīmis terminis qui ſint b c d e:ſitq̄ totus ex ipis compoſitus b e.et quia a ex hypotheſi diuidi poteſt per b e:diuidat̄ ergo per b e ſcꝫ f:eritq̄ f nūerus ex diuiſione ꝓueniēs.duco b c d e in f et ꝓueniant g h k l qui ꝑ octauam ſecūdi ꝯtinebūt eaſdē ꝓportiones cū b c d e:ita vt ſit g ad h vt b ad c/et h ad k vt c ad d/et k ad l vt d ad e.et qꝛ per decimam p̄mi quod fit ex ductu b e in f:equat̄ ei quod fit ex ductu b c/c d/et d e in f.et per ſextam petitionem p̄mi ducto b e in f fit atq̄ reuertitur a.eſt ergo a diuiſus in quattuor partes inequales g h k l in ꝯtinua ꝓportionalitate proportiones aſſignatas ꝯtinētes.quod eſt propoſitum.

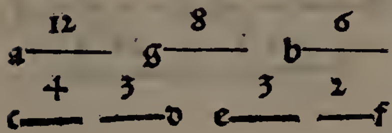


8 ¶Quotlibet proportiōes quocūq̄ ordine cōtinuate:eādem proportionem ꝯſtituūt.

¶Id primo in duabus ꝓportiōibus oſtēdendū eſt.Sint ergo a b quecūq̄ due ꝓportiones vt a dupla et b ſeſqualt̄a:et continuetur primo dupla ſeſqualt̄a in numeris c d e:ita vt dupla ꝓportio precedat:ꝛ ſeſqualt̄a ſequat̄.erit enī c ad d duplus:et d ad e ſeſqualt̄.ꝯtinuētur ſecūdo eedē ꝓportiōes in nūeris f g h:ita tñ vt ſeſqualt̄a p̄cedat et dupla ſequat̄.erit enī f ad g ſeſqualter:et g ad h duplus.dico c ad d et d ad e:item f ad g et g ad h eādem cōſtituere ꝓportiōem.Nam q̄ proportio g ad h ea eſt c ad d:et q̄ f ad g ea eſt d ad e.ergo ꝑ viceſimāſcđam ſecūdi et equā ꝓportionalitatē indirectam:q̄ proportio f ad h eadem eſt c ad e.quod eſt propoſitum in duobus ꝯcluſum. In tribus aūt ꝓportiōib⁹ id adiuuātibus duabus oſtēdit̄.vt ſi qua ſit tertia ꝓportio q̄ ipſis ꝯtinuāda ſit:ꝯtinuet̄ ergo illis p̄mo in fine.vt e ad l ſit ꝓportio k.et ſiliter h ad l.quia vt oſtēſum ē:que ꝓportio f ad h:ea eſt c ad e.et que h ad l: ea e ad l. ergo ꝑ equā ꝓportiōalitatem q̄ proportio f ad l: ea eſt c ad l.et ita ſi vtriq̄ ꝑponat̄.at ſi vni poſtponat̄ vt e l ſit proportio k poſtpoſita:et l f eadem ꝑpoſita.qꝛ que ꝓportio f ad h ea ē c ad e:et que l ad f ea eſt



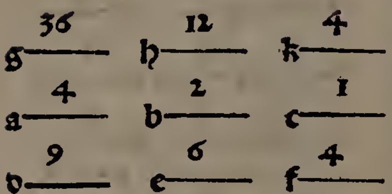




e ad l.ergo ꝑ indirectam ꝓportiõalitatem q̄ ꝓportio l ad h:eadẽ est c ad l.et si k inſeraẜ duabus aliĳs ita vt c ad d sit ꝓportio a/⁊ d ad l sit k/et l ad e sit b.item f ad g sit b/et g ad l sit k/et l ad h sit a.que ꝓportio l ad h ea ẽ c ad d:et que g ad l ea est d ad l:et que f ad g ea l ad e.ergo ꝑ equã ꝓportionalitatem directam q̄ proportio f ad h:eadẽ est c ad e.et si hic postponaẜ k/illic ꝯo inſeraẜ vt fit in duabus vltimis figuratiõibus:quia q̄ ꝓportio d ad l ea est e ad l.et que l ad e ea est d ad e.ergo ꝑ indirectam ꝓportionalitatem que ꝓportio d ad e:ea ẽ d ad l.addita ergo vtriq; eadẽ ꝓportiõe c ad d:erit tota ꝓportio c ad e:equalis toti c ad l.at ꝓportio f ad h equaẜ proportioni c ad e:ergo ⁊ proportioni c ad l.quod est propositum.Et si de quattuor ꝓportiõibus id desideras adiuuãtibus tribus adinuicem ꝯtinuatis id efficere studeas.nam idem demõstrandi modus est.

Omim duoꝝ compositoꝝ proportio que est vnius ad alterum : est ex laterum suorũ ad latera alterius composita proportionibus. 9

Latera ꝯpositi dicũtur nũeri qui in seinuicem ducti:ꝯpositũ ꝓducũt.Sint ergo duo ꝯpositi a b.et latera a:sint c d:c quidẽ maius ⁊ d minus.et latera a b sint e f:e q̄dẽ maius/f minus.dico ꝓportiõem a ad b ꝯpositam eẽ ex proportiõibus c ad e ⁊ d ad f.duco enĩ c maius laterũ a:in f minus laterum b:⁊ proueniat g.quia enĩ c in d facit a:⁊ c in f facit g:ergo ꝑ septimã secũdi que ꝓportio d ad f ea est a ad g.et quia f in c facit g et f in e facit b:ergo ꝑ eãdeȝ septimam que proportio c ad e ea/est g ad b.at proportio a ad b ꝯstituiẜ ex proportionibus a ad g et g ad b:ergo ⁊ ex proportiõibus c ad e et d ad f.quod est propositum.



Si numeri continue proportionales in totidem alios ꝯtinue etiam proportiõales ducantur:et qui inde prouenient continue proportionales erunt. 10

36 12 4
g h k
4 2 1
a b c
9 6 4
d e f

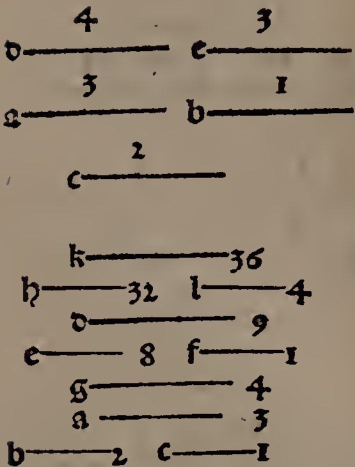
Sint a b c numeri ꝯtinue proportiõales itidẽ ⁊ d e f alĳ totidẽ cõtinue proportiõales:⁊ ducaẜ d ĩ a ⁊ proueniat g/⁊ e in b ⁊ proueniat h/⁊ f in c ⁊ proueniat k.dico productos g h k eẽ ꝯtinue proportiõales.Nam cũ latera g sint d a:⁊ latera h sint e b:⁊ latera k sint f c:ergo ꝑ precedẽtem proportio g ad h cõstat ex proportiõibus d ad e ⁊ a ad b.⁊ proportio h ad k ex proportiõibus e ad f ⁊ b ad c.sȝ proportiones e ad f ⁊ b ad c:eedem sũt proportiõib⁹ d ad e ⁊ a ad b:ergo ⁊ proportio h ad k ex illis ꝯstãs: eadẽ est proportioni g ad h.que igiẜ proportio g ad h ea est h ad k.qꝺ demonstrandum erat ⁊ propositum.

Numerum ita diuidere vt q̄ totius ad maiorem portionem:ea maioris ad minorẽ sit ꝓportio est impossibile. 11



Si eĩ hoc pacto quisq̄ nũerus diuidereẜ:dicereẜ diuidi ſm proportiõem hñtem mediũ ⁊ extrema. hec itaq; ꝓponit nullũ numerum ſm proportiõem hñteȝ mediũ et extrema diuidi posse.Nam si aliq̄s hũc in modũ diuidi potest:sit ille a b q̄ sit diuisus in a d minorem portiõem ⁊ d b maiorem: sitq; vt a b ad d b:ita d b ad a d.detraho ab maiori portione d b numerum c d equalem a d.et qꝛ que proportio a b ad d b:ea est d b ad a d.et quia a d ⁊ d c equanẜ:ꝫ q̄ proportio totius a b ad totum d b ea est d b ad d c detracti ad detractũ.ergo ꝑ quintam secũdi q̄ proportio a b ad d b:ea est a d ad c b residui ad residuũ quare ⁊ eadem d c ad c b.quare iteꝝ q̄ proportio d b ad d c:ea est d c ad c b.capio iteꝝ d e equalẽ c b.et quia sicut d b ad d c:ita d c ad c b ⁊ d e equaẜ c b.ergo sicut d b ad d c totus ad totũ:ita d c ad d e detractus ad detractum.quare per quintam secundi sicut d b ad d c totus ad totum:ita c b ad e c residu⁹ ad residuum.quare iteꝝ simili argumentatione detracto e c ab c b:erit residuus ad residuum perinde vt totus ad totum.atq; hoc/abibit in infinnitum.qꝺ per quartam petitionem ẽ impossibiẜe certũ est ergo numerum aliquem ita diuidi non posse.

Numerum ex duobus constãtem inuenire:cuius ad maiorem proportio addet sup proportionem eorũdem data proportione minus. 12



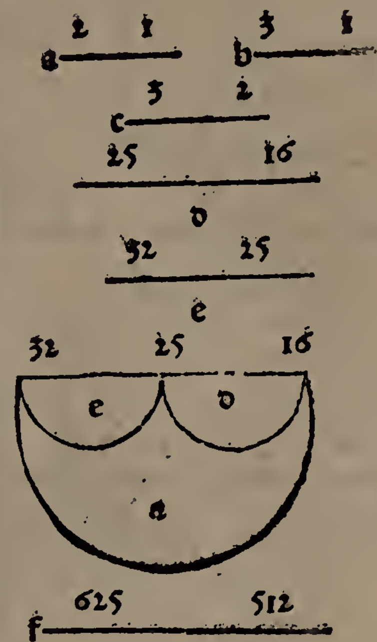
Sint a b mĩni termini ꝓportionis date:a maior et b minor:et sit p̄mo differentia a ad b numerus c ⁊ maior proportio a ad b q̄ b ad c:et sit d numerus ꝯstitutus ex duobus scȝ a ⁊ b quẽ dico minorẽ hr̃e proportiõem ad a maiorem eius portionem q̄ sit a ad b proportio assignata:sit e ꝯpositus ex b c.quia enĩ proportio a ad b primi ad scd̄m maior est q̄ b ad c tertĳ ad quartũ:ergo ꝑ primam ꝑtẽ decieequite secũdi d ad b proportio maior q̄ e ad c.et per scd̄am ꝑtem eiusdeȝ erit d ad a proportio mĩor q̄ e ad b. at cũ e ꝯstituaẜ ex b ⁊ c dr̃ia a ad b:equabiẜ ipsi a.ergo d ad a proportio minor q̄ a ad b.qꝺ ẽ ꝓpositũ. Sit scd̄o vt minor sit ꝓportio a ad b q̄ b ad c:capio quẽcunq; numerum maiorem a qui sit d:a quo detraho f equale c ⁊ residuum sit e.et intelligo c detractũ ab a ⁊ b residuũ.et qꝛ maior est ꝓportio d ad a totius ad totum q̄ f ad c detracti ad detractũ:ergo ꝑ decimãtertiam secũdi:maior est proportio e ad b residui ad residuũ q̄ d ad a totius ad totum.et vltra maior est proportio e ad b q̄ d ad a.ergo ꝑ duodecimam eiusdẽ maior est proportio e ad d q̄ b ad a.quare per vndecimam eiusdem erit proportio d ad e minor q̄ a ad b.et cũ e f ꝯstituãt d:⁊ e maior sit f:si vterq; e ⁊ f sit nũerus ꝯstat d numerum ex duobus e ⁊ f ꝯstitutũ eẽ quem querimus.q̄ si f sit vnitas:duco aliquẽ numerum vt g in e et ꝓueniat h/ et in d et proueniat k.et in f et proueniat l.per septimam secũdi que ꝓportio e ad d et d ad f:ꝯsiẜis est h ad k et k ad l.et cũ per nonam p̄mi quod fit ex g in e ⁊ in f equeẜ ei qui fit ex g in d:ergo k ꝯstituiẜ ex duob⁹ numeris h et l.quare k est talis numerus qui queritur.

Duabus ꝓportiõibus inequalibus ꝓpositĳ:tertiam reperire que duplicata: miore sit maior/et maiore minor. 13

¶ Sint termini maioris ꝓportionis a b: ⁊ termini minoris c d: et a ⁊ c numeri maiores / ꝓpositūq; sit tertiam ꝓportionem reꝑire q̄ duplata: minore sit maior ⁊ maiore minor. ducam enī a in c et in d ⁊ ꝓueniant e f: et b in c et ꝓueniat g. manifestū est enī per septimam secūdi e esse ad f vt c ad d: et ꝑ octauam eiusdē e ad g eē vt a ad b. et quia e ad f minor est proportio ꝙ̄ c ad g: ergo ꝑ decimam secūdi f est maior g. deinde duco f in e et in se et in g et ꝓueniāt h / k / l qui ꝑ septimā secūdi erūt in ꝓportiōe e / f / g: vt scʒ h k sit vt e f / et h l vt e g. deinde duco e in se et ꝓueniat m. tūc enī q̄a f in e facit h / et e in se facit m: ergo ꝑ octauam secūdi m ad h vt e ad f: quare et vt h ad k. Si ergo ꝓportio m ad k ex duabus ꝓportiōibus minori assignate equalibus ɔstituta: sit minor ꝓportione h ad l quero aliquē numerum vt o: qui in se ductus ꝓducat p maiorem h et minorem aut equalem m. et dico proportiōem o ad f esse cuius dupla maior est proportiōe c ad d ⁊ minor proportiōe a ad b. nam cū f in se faciat k / et o in se faciat p: ergo ꝑ ea que in principio tertie propōnis huius demōstrata sunt est ꝓportio o ad f addita ad seipam. quare et proportio p ad k dupla ad proportiōem o ad f. at cū p sit maior h ꝓportio p ad k per nonam secūdi maior est ꝙ̄ proportio h ad k. quare et proportiōe c ad d. et cū proportio m ad k minor eēt proportiōe h ad l / etiā et proportio p ad k proportioni quidē o ad f assignate dupla minor eēt eadē ꝓportiōe h ad l: quare et proportione a ad b et propositū. at si proportio m ad k maior est proportiōe h ad l: sit ergo illaꝝ differētia m ad n. tūc enī proportio n ad k erit eq̄lis proportioni h ad l. ⁊ tūc querā aliquē nūerū vt o qui ductus in se ꝓducat p: maiorem quidē h sed minorem n. et argumētabor vt prius proportiōeʒ p ad k duplā quidē proportioni date o ad f maiorem eē proportiōe h ad k quare ⁊ proportiōe c ad d. ⁊ minorem eē proportione n ad k quare et proportione h ad l et proportione a ad b. qđ iteꝝ est ꝓpositū. Hic tñ attende ꝙ vbi non facile possis inuenire numerum similem o / tunc duc k in h in se ⁊ in l: et iteꝝ h in se donec oportune talis numerus tibi occurrat.

14 ¶ Quālibet proportiōem in duas diuidere: quaꝝ dfia sit data proportiōe minor.

¶ Sit b data proportio: propositūq; sit a alteram proportionem datam in duas ꝓportiōes diuidere: quaꝝ vnius ad alteram differentia sit data proportione b minor. capio ꝑ primam huius differentiam proportionis b ad a que sit c. Si c sit eq̄lis aut maior a / oportet c minorem eē b. cū ꝑ diffinitiōem c eēt proportio qua b suꝑaret ꝓportiōem a. quare et a aut eque aut multo fortius minor eēt b. in quascūq; ergo duas proportiōes diuidat a: ille erunt minores a. nā eius ꝑtes. quare et differētia vnius ad alteram (cū ea sit alterius partis portio ꝙ̄ suꝑ alteram addit) minor erit altera partium: quare mīor toto a. quare ⁊ multo fortius minor toto b / sicq; in quascūq; diuideret a: haberet propositū. Q si ꝓportio c minor sit a inuenio ꝑ precedentem proportionem aliquā cuius dupla sit maior c / et minor a. sitq; illa duplata proportio d. capioq; dfiam d ad a ꝑ primam huius q̄ sit e quā dico eē minorem b. nā si ipsi eēt equalis: cū b c equētur a: ergo d que est maior c. cū e equali b maiorem proportiōem ɔstituit ꝙ̄ sit a. nō ē ergo e differētia a ad d qđ est ɔtra hypothesim. Et si e eēt maior b multo fortius d et e maiorē ꝓportionem ɔstituūt ꝙ̄ b ⁊ c. quare maiorem proportiōem ꝙ̄ sit a: qđ iteꝝ eēt e nō esse dfiam a ad d ⁊ ɔtra hypothesim. Relinquit ergo proportiōem e esse minorem proportione b. et quia due proportiones d ⁊ e equātur proportioni a: intelligo proportiōem a in illas esse diuisam: et dico differentiam illaꝝ scʒ d ad e que sit f eē data proportione b minorem. nam si esset equalis b: cū b et d maiorem ɔstituāt proportionem ꝙ̄ a vt dictum est etiā d et f maiorem ɔstituerēt a / quare ⁊ d ⁊ e. quare f non eēt dfia d ad e et ꝑ idem f non potest esse maior b. cōstat ergo propōem a vt ꝓponit ꝓpositio eē diuisam ⁊ ꝓpositum.



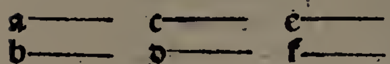
15 ¶ Si tres nūeri ɔtinue ꝓportiōales: tribus aliis ɔtinue ꝓportiōalibus comparētur: extremoꝝ ad extremos ꝓportiōes ɔtinuate erunt tanq̄ mediorū ꝓportio duplicata.

¶ Sint a b c tres numeri ɔtinue proportiōales: item d e f tres alij ɔtinue proportiōales. dico ꝓportiones a ad d et c ad f adinuicem ɔtinuatas: equari proportioni b ad e: duplicate. duco enī c in a ⁊ in d ⁊ ꝓueniāt g / h / et f in d et ꝓueniat k. eritq; per septimam secūdi proportio g ad h vt a ad d: ⁊ h ad k per octauam eiusdem vt c ad f. atq; proportiones a ad d et c ad f adinuicem ɔtinuate per g h k et ꝑ tertiā huius addo proportiōem a ad d ꝓportioni c ad f ducēdo a in c et ꝓueniat l. et d in f et ꝓueniat m. manifestū est proportionem l ad m ɔstitutā esse ex proportiōibus g ad h et h ad k: atq; ipsis simul sūptis equari. deinde duplo proportionem b ad e addendo per tertiam huius proportiōem b ad c sibiipsi ducendo scʒ b in se. et quia a b c sunt ɔtinue proportiōales: ꝑ vicesimāsextam secūdi ꝓueniet l: ⁊ ducēdo e in se et ꝑ eādem vicesimāsextam secūdi ꝓueniet m. quare duplata proportio b ad e equat proportiōi l ad m que ꝓbata est equari proportiōibus g ad h et h ad k scʒ ꝓportiōibus a ad d et c ad f adinuicem continuatis. quod est propositum.

16 ¶ Si quattuor numeris cōtinue proportiōalibus alij totidem cōtinue proportiōales adaptentur: erunt proportiones extremorū ad extremos ɔiūcte tanq̄ proportiones mediorum ad medios cōtinuate.

¶ Sint a / b / c / d: quattuor numeri ɔtinue ꝓportiōales: et e / f / g / h totidem alij ɔtinue proportiōales. dico proportionem cōpositam ex proportiōibus a ad e et d ad h equari proportiōibus ɔtinuatis b ad f et c ad g. ɔtinuatis siq̄dē ꝓportiōibus b ad f et c ad g: vt in p̄cedenti factum est. ꝑ septimā ⁊ octauam secūdi hec ex tertia huius ⁊ vicesimaquīta secundi cognoscitur vt precedens ex vicesimasexta.

17 ¶ Si quotlibet numeri ad totidem alios comparētur: proportiōes eoꝝ quolibet mō sumptorum eandem proportionem componunt.



¶ In duobus nūeris id p̄mo videndum est. ſint enī a et b duo numeri / et c d duo alij qui duobus p̄mis compareꝫ: dico eādem ꝓportiōem ꝯpoſitam eſſe ex a ad b ⁊ c ad d / et ex c ad d et a ad b. Si enī nūeri illi eēnt equales: ſtatim de ſe notum eēt. Siſr̄ ſi duo primi eēnt equales inter ſe / et duo ſecūdi inter ſe: et ſiſr̄ ſi tres eēnt equales ⁊ vnus inequalis. ſed eſto proportio a ad b maior proportiōe c ad d facio a ad b primam ꝓportiōem / c ad d ſcd̄am / ⁊ iteꝝ a ad b tertiam / ⁊ c ad d quartam. et quia q̄ntum a ad b prima addit ſup̄ c ad d ſcd̄am tm̄ addit a ad b tertia ſupra c ad d quartam. ergo p̄ tertiā hui⁹ ꝯpoſita ex a ad b et c ad d prima ⁊ quarta equaꝫ cōpoſite ex c ad d et a ad b ſecūda et tertia. quod intēdebaꝫ. Idem quoq̄ in tribus efficies. Sint a / c / e: tres nūeri qui ꝯpareꝫ b / d / f. dico eandem compoſitam eē ex a ad b / c ad d / et e ad f: et ex c ad d / a ad b / et e ad f. nam per immediate mōſtratū eadem ē ꝯpoſita ex a ad b et c ad d / et ex c ad d et a ad b: ergo ꝓportiōe e ad f vtriq̄ addita: ꝓportiōes erūt equales. qđ erat ꝓbandum. dico item eādem eē compoſitam ex a ad b / et e ad f / et c ad d: et ex e ad f / a ad b / et c ad d. Nam per nup̄ mōſtratū eadē eſt ꝓportio cōpoſita ex a ad b et e ad f: et ex e ad f / ⁊ a ad b. ergo ꝓportione c ad d: vtriq̄ adiecta fiūt ꝓportiōes a ad b / e ad f / et c ad d. item e ad f / a ad b / ⁊ c ad d: adinuicem equales. qđ ꝓponebaꝫ ꝓbādum. Et ita alias ꝯbinatiōes ꝓba et adiuuātibus trib⁹: de q̄ttuor expedi Et ita conſequēter.

¶ Quinti elementoꝝ Arithmetices Jordani finis.

Latera numeroꝝ dicūtur: quoꝝ multiplicatiōe: numeri ꝓducūtur. Sup̄ficialis appellaꝫ numerus: qui duobus lateribus continetur. Solidus v̄o qui ſub tribus: ex quoꝝ ꝯtinua multiplicatione habet ꝓcreari. Quadratus eſt numerus ſup̄ficialis equalibus lateribus cōtētus. Altera parte longior: eſt cuius latera ſunt inequalia ſed ſola vnitate diſtātia. Cubus eſt numerus ſolidus equalibus conſiſtens in lateribus. Similes dicūtur numeri ſiue ſup̄ficiales ſiue ſolidi: quoꝝ latera ſunt proportionalia.

¶ Si tres numeri fuerint in ſua proportione mīmi: duo extremi erunt quadrati. 1



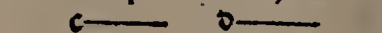
¶ Sint a b c tres nūeri cōtinue proportiōales in ſua ꝓportiōe mīmi: dico a eſſe numerum quadratū atq̄ ſiſr̄ c eſſe numerum quadratum. Nā per ſeptimā quarti erit vnus medius ꝓportiōalis inꝫ a ⁊ vnitatē qui ſit d: et ſiſr̄ vnus inꝫ c et vnitatem qui ſit e. quia ergo quoties vnitas in d toties d eſt in a: ergo d in ſe ductus multiplicat / atq̄ ꝓducit a. eſt ǧ a quadratus. nam d ⁊ d eius latera ſunt equalia Et q̄ etiam quoties vnitas in e toties e eſt in c: ergo e in ſe ductus ꝓducit c. quare c etiam quadratus. quod eſt propoſitum.

¶ Si fuerint quattuor numeri in ſua proportione mīmi: duo extremi erunt cubi. 2



¶ Sint a / b / c / d quattuor numeri ꝯtinue proportiōales: in ſua proportiōe minimi. dico a cubum eſſe atq̄ d cubum eſſe. Nam p̄ ſeptimam quarti erūt duo medij proportiōales inter a et vnitatem qui ſint e et f: et ſiſr̄ duo inter d ⁊ vnitatem qui ſint g et h. et quia quoties vnitas in e toties e in f: ergo e in ſe ꝓducit f. et quoties vnitas in e toties f in a: ergo e in f ſuū quidē quadratū ꝓducit a. eſt igiꝫ a cubus. et per idem quia quoties vnitas in g toties g in h: ergo g in ſe ꝓducit h. et quoties vnitas in g toties h in d: ergo g in h ſuum quadratum: ꝓducit d. quare etiā d cubus. quod eſt propoſitum.

¶ Oīs q̄drati ad quadratū eſt tanq̄ lateris ip̄ius ad latus alt̄ius ꝓportio duplicata. 3



¶ Sint duo quadrati a et b: ⁊ latus a ſit c / et latus b ſit d. dico proportiōem a ad b eē tanq̄ proportio c ad d duplicata. duco enī c in d ⁊ fiat e. et erit p̄ ſeptimam ſecūdi a ad e ſicut c ad d. et p̄ octauā eiuſdeꝫ e ad b vt c ad d: eſt ergo a ad e vt e ad b. at proportio a ad b conſtat ex ꝓportiōib⁹ a ad e et e ad b: quaꝝ quelibet equatur c ad d. eſt ergo a ad b tanq̄ ꝓportio c ad d duplicata: vt ꝓponebatur.

¶ Proportio cubi ad cubū: eſt tanq̄ lateris ad latus triplicata. vnde manifeſtum eſt inter quoſlibet duos quadratos vnū: atq̄ int̄ cubos duo ꝓportiōalit̄ media ꝯſiſtere. 4



¶ Sint duo cubi a ⁊ b. et latus a ſit c: et latus b ſit d. ſitq̄ e quadratū c / et f quadratū d. inter quos ex demōſtratione precedētis eſt vnus medius ꝓportiōalis qui ſit g. deiñ duco c in e et certū eſt ꝓuenire a: et c in g et ꝓueniat h: et d in f et certū eſt ꝓuenire b: et d in g ⁊ ꝓueniat k. manifeſtū eſt ex precedēti eandem eſſe proportionem e ad g et c ad d: et eādem g ad f et c ad d. ſed p̄ ſeptimā ſecūdi a ad h vt e ad g. quare vt c ad d: et per octauam eiuſdem h ad k vt c ad d. et per ſeptimam eiuſdē k ad b vt g ad f. q̄re vt c ad d. eſt igitur quelibet trium proportionum a ad h / h ad k / et k ad b alteri equalis: atq̄ equalis c ad d. ſed proportio a ad b ꝯſtat ex illis tribus. eſt igiꝫ proportio a ad b tanq̄ ꝓportio c ad d triplicata. Et correlarium ex modo demōſtrationis cognitum eſt ⁊ propoſitum.

¶ Quoꝝ latera ꝓportiōalia ſunt quadratos ꝓportiōales eē: atq̄ ſi quadrati ꝓportionales ſunt: et latera ꝓportionalia eſſe neceſſe eſt. 5

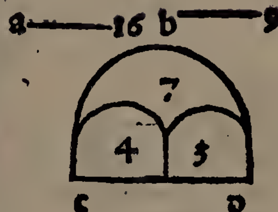


¶ Sint a / b / c tres numeri ꝯtinue proportiōales: quoꝝ quadrati ſint d / e / f. dico quadratos d / e / f eſſe ꝯtinue proportiōales. Itē dico ſi d / e / f ſunt ꝯtinue proportiōales: ⁊ a / b / c eoꝝ latera eē proportiōalia. Prima pars ſtatim ex decima quīti cognoſcitur. et ſcd̄a oſtendiꝫ. Nam quia proportio d ad e p̄ nonā quinti eſt compoſita ex ꝓportiōibus a ad b ⁊ a ad b: et ſiſr̄ ꝓportio e ad f ꝯpoſita ex ꝓportiōibus b ad c et b ad c: ǧ ꝓportiōes a ad b et b ad c ſunt equales. alioquin p̄ quintam eiuſdem ſingulis addite ſue equales: non ꝯſtituerēt d ad e et e ad f proportiones equales. qđ eſt ꝯtra hypotheſim.

6 ¶Si cubi fuerint proportiõales: erunt ꝛ latera ꝓportionalia. ꝙ si latera ꝓportiõalia fuerint: cubi quoqꝫ proportionales erunt.

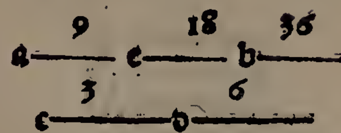
¶Sit hypothesis ea q̄ prius: sed g/h/k sint cubi numeroꝝ a/b/c. Scd̃a pars hui⁹ patet ducendo a b c ꝯtinue proportiõales in d e f suos quadratos qui ꝑ primam ꝑtem p̄cedentis sunt ꝯtinue ꝓportiõales et ꝓueniēt g h k qui ꝑ decimam quinti sunt ꝯtinue proportiõales. qd̄ est scd̄m. Et p̄ma pars declarat̃ Nam per nonam quinti proportio g ad h ꝯposita est ex proportiõibus d ad e ꝛ a ad b. et ꝓportio h ad k cõposita ex proportiõibus e ad f ꝛ b ad c. et si a ad b et ad c nõ sunt ꝓportiõabilia: neqꝫ d e f. si ergo a ad b maior sit proportio q̄ b ad c: ergo per quintam quinti maior erit d ad e q̄ e ad f. ergo per eandem quintam g ad h ꝯstituta ex d ad e et a ad b maioribus ꝓportionibus erit maior q̄ h ad k. nõ sunt igit̃ g h k proportionales. quod est ꝯtra hypothesim ꝛ totum propositum.

7 ¶Quo abũdat quadrat⁹ super quadratũ est nũerus ex lateribus ipsoꝝ coacervatus et s̄m laterum differentiam multiplicatus.



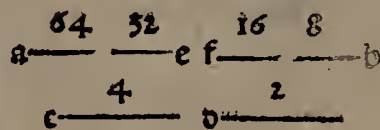
¶Sint a ꝛ b duo quadrati: a maior/ et b minor. sitqꝫ c latus a: ꝛ d latus b. dico numerum quo a supat b: esse numerum qui ꝓcreat̃ ex ductu differētie c ad d in coacervatum c d. Intelligo eni coacervatum c d esse divisum in c maiorem numerum: ꝛ d minorem. et quia ꝑ decimãoctavam p̄mi quod fit ex d in se: cũ eo quod fit ex differētia c ad d in coacervatum c d: equũ est ei quod fit ex c in se. sed qd̄ fit ex c ī se est quadratũ maius a: ꝛ qd̄ fit ex d in se est b quadratũ minus: ꝫ b quadratũ minus supat̃ ab a q̄drato maiore in eo nũero q̄ fit ex d'ria c ad d in coacervatũ c d. abũdat ꝫ a sup b in eodē nũero. qd̄ ē ꝓpositũ.

8 ¶Si quadratus quadratum numeret: et latus suũ latus alterius nũerabit. ꝙ si latus a latere numerabitur: et quadratus a quadrato numerabitur.



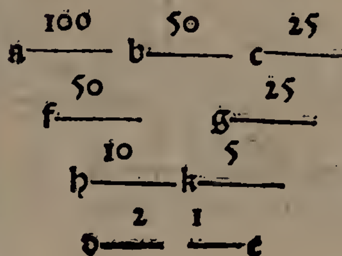
¶Sint a b duo quadrati/ et a numeret b: sitqꝫ c latus a ꝛ d lat⁹ b. dico c nũerare d. dico itē si c nũerat d: etiã a numerare b. sit eni ꝑ correlariũ quarte huius e medium proportiõale inter a ꝛ b: erũt enim a ad e et e ad b in ꝯtinua proportiõe vt c ad d. sed a primus numerus ꝑ hypothesim numerat b vltimũ: ergo per decimãtertiã quarti: a p̄mus nũerat e scd̄m. quare c numerabit d. qd̄ est p̄mũ. Scd̄m p₃: nã si c nũerat d: ꝫ ꝛ a nũerat e ꝛ e nũerat b. q̄re ꝑ vicesimãtertiã p̄mi a nũerabit b. qd̄ ē scd̄m ꝛ totũ ꝓpositũ

9 ¶Si cubus cubum nũeret: ꝛ latus ipsius latus alterius numerabit. ꝙ si latus nũerat latus: et cubus cubum numerabit.



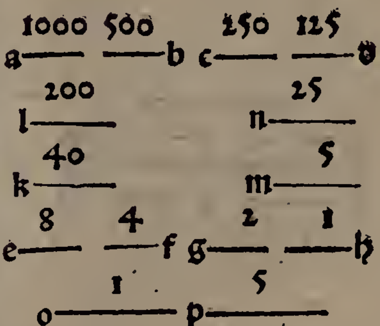
¶Quod de quadratis modo ostensum est/ hic de cubis demõstrandum ꝓponitur. Et p̄ma ꝑs positis medijs ꝓportiõalibus int̃ cubos ꝑ correlariũ quarte huius vt p̄ma p̄cedētis cognoscit̃: ꝛ scd̄a vt scd̄a.

10 ¶Trium numerorum cõtinue proportionalium: si primus fuerit quadratus: tertium quoqꝫ quadratum esse necesse est.



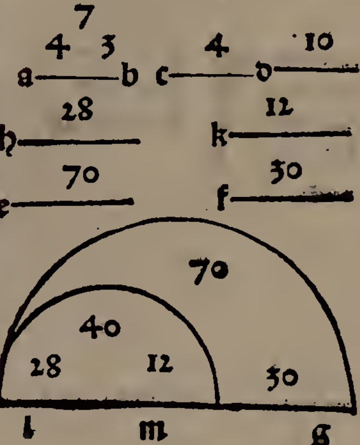
¶Sint a b c tres numeri ꝯtinue proportionales: et sit a quadratus: dico c eē quadratum. sint eni d e mimi in proportiõe a ad b. per decimãnonam tertij d numerabit a. sitqꝫ id scd̄m f. ꝛ e etiam per eãdem numerabit c. cũ per hypothesim eadē sit proportio a ad b ꝛ b ad c: sit ergo id scd̄m g. et quia a ponitur quadratus: sit ergo eius latus h. q̄a eni h in se tm̄ est q̄tum d in f: ergo ꝑ scd̄a ꝫ ꝑtem vicesimesexte scd̄i d/h/f sunt ꝯtinue proportiõales. et ꝑ nonam quĩti ꝓportio a ad c: ꝯposita ex proportiõibus d ad e ꝛ f ad g. ergo q: a ad b vt d ad e: erit b ad c vt f ad g. est ergo d ad e vt f ad g. ergo ꝑmutatim d ad f sicut e ad g. ergo per duodecimam quarti inter e et g tot media proportiõalia cadũt: quot inter d ꝛ f. at int̃ d et f cadit h vnũ medium ꝓportiõale: igit̃ ꝛ inter e et g cadet vnũ ꝙ sit k. et q: ex e in g positũ est fieri c: ergo ꝑ vicesimãsextam secundi ex k in se fiet idem c. est igit̃ c quadratus. quod erat demonstrandum.

11 ¶Si q̄ttuor numeroꝝ ꝓportiõaliũ p̄mus fuerit cubus: quartũ q̄qꝫ cubũ eē ꝯueniet.



¶Sint a/b/c/d quattuor nũeri ꝯtinue proportõales: quoꝝ a p̄mus sit cubus. dico d quartũ eē cubũ. sicut eni e/f/g/h quattuor in eadem proportiõe mimi: erũtqꝫ per scd̄am hui⁹ e ꝛ h cubi. et q: e ꝛ a sunt cubi: erũt ꝑ correlariũ quarte huius duo proportiõales medij inter e et a qui sint k l. et quia ꝑ equam proportiõalitatem que ꝓportio e ad h ea est a ad d: ergo ꝑmutatim q̄ ꝓportio e ad a: ea est h ad d. sed inter e et a ꝓbati sunt eē duo ꝓportiõales medij. ergo ꝑ duodecimam quarti ꝛ int̃ h ꝛ d duo sil'r erũt ꝓportiõales medij qui sint m ꝛ n. et q: ꝑ decimãnonam tertij h nũerat d: ergo per scd̄am ꝑtem decime tertie quarti h numerabit m. Sit igit̃ o latus cubi h: sitqꝫ quoties h in m toties o in p. q: igit̃ ꝓportio d ad h tanq̄ m ad h triplicata: erit eadē ꝓportio d ad h tanq̄ ꝓportio p ad o triplicata. et q: ꝑ quartã huius eadem est ꝓportio int̃ cubum p et cubũ h. erit igit̃ d cubus: ꝛ eius latus erit p. qd̄ est ꝓpositũ.

12 ¶Quadratos tres investigare: quoꝝ ꝯtinue sumptoꝝ differentie sint equales.



¶Sit c duplum cuiuslibet numeri. addat̃qꝫ c cuilibet nũero vt b. sitqꝫ a ꝯpositus ex b c. et ex a ꝛ b fiat d. et ex c in a ꝛ in b fiãt h ꝛ k. et ex a ꝛ b in d fiant e et f. et ponatur numerus l/m/g equalis numero e: ita vt g sit equalis f. quia eni e/ et l/m/g equãtur: et ex a in d fit e: etiã ex a in d fit l/m/g. sed g equatur f qui fit ex b in d: ergo residuũ l et m per decimam primi equũ est ei q̄ fit ex c in d. quare ꝑ nonã eiusdeꝫ l et m sunt tanq̄ h et k. Sit ergo l equalis h: et m equalis k. dico ergo l g posse dividi in duo equalia. Nam cũ b in d fiat g: et d sit tanq̄ b bis ꝛ c: iteꝝ b in se bis. hoc est in suũ duplum. et in c facit g. ꝛ a in c facit l. erũt ergo l g tanq̄ qd̄ fit ex b in se bis. et a b (quod est d) in c: cui⁹ dimidiũ est quod fit ex b in se semel: et ex d in dimidium c. est ergo numerus l g: in duo media eideꝫ dimidio eq̄lia divisibile. divido

1681
q — e
1 841
r — e v — e
1 29 41
r — v — q —
— 840
Differentia trium quadratorum continue eadem
1 25 49
1 5 6 7
d — — b a — — c
4 2
e — f —

ergo l g in duo media eq̄lia:sitq̃ r differētia vni⁹ illoꝝ dimidioꝝ ad g.et v numerus equalis dimidio. et q differētia dimidij l g:ad totū l m g.dico tres q̄dratos numeroꝝ r,v,⁊ q:q̄ sint r e:v e:q e:eē qui petūtur. Nam cū differētie quadratoꝝ sint p septimam huius q̄ ex differētijs laterum in ↄposita ex ipsis ꝓducūtur:ↄtinue videbis ex dr̄ia r ad v in ↄpositū r v qđ est g.et ex dr̄ia v ad q in ↄpositum v q qđ est l m g:eq̄lem numerū ꝓduci p vicesimamquītam secūdi ꝙ eadem sit ꝓportio differētie r ad v ad dr̄iam v ad q.sicut aggregati q v ad aggregatum r v.siue sicut l m g ad m g:quod idem est.Sed hoc vltimum facilius forte capies in minoribus numeris ⁊ eodē ingenio inuentis.vt sit a senarius.et ꝓximi hinc ⁊ inde sint b ⁊ c.b minor: ⁊ c maior.certū est b eē quinariū:cuius dr̄ia ad a sit d.quā certū est eē vnitatē sitq̃ e differētia d ad b vnitatis ad quinariū:quā ↄstat esse quaternarium.sitq̃ f differētia b ad c.que quia dupla differētie b ad a:ideo erit binarius.est itaq̃ e ad f duplus.sed d b per ↄceptiōem sunt a.et per scđam primi b c simul sunt duplus ad a.igiť et b c simul:sunt duplus ad d b.quare que ꝓportio e ad f differētie ad differentiam ea est aggregati b c ad aggregatum d b.ergo per vicesimāquītam scđi tm̄ est quod fit ex e in d b q̄tum qđ ex f in b c.ergo per septimam huius tres quadrati numerorū d b ⁊ c sunt quales propositi sunt inueniri possibiles.quod est propositum.

h — 100
k — 64 a — 36
f — 10 b — 18
e — 9 c — 6
g — 8 d — 2

¶ Numerum quadratū inuenire: q̄ cū quadrato dato numerum quadratū ↄstituat. 13

¶ Sit p̄mo datus nūerus quadratus a:qui diuisibilis sit in duo equalia.cuius medietas sit b.latus aūt eius sit c.sitq̃ d binarius.quia ergo qđ fit ex d in b:equať ei quod fit ex c in se:erit p vicesimāsextā secūdi c ꝓportiōaliter medius inter binarium ⁊ b.et quia d binarius est numerus primus: ⁊ p primā quarti cōicat cū c ⁊ c cū b:etiā d cōicabit cū b.p p̄mā ꝫ tertij d nūerabit b.cuius q̄dē b:medietas sit e. et nūeri circūpositi sint f maior ⁊ g minor:quoꝝ q̄drata sint h ⁊ k.dico ꝫ quadratū h eē tanq̄ numerū quadratum k: numero quadrato a additum.Nam differētia f ⁊ g ē binarius ⁊ ↄpositus ex ipsis per secūdam primi est b.et quia ex binario in b per hypothesim fit a:ergo per septimam huius cū a fiat ex differētia laterū in cōpositū ex ipsis a est dr̄ia q̄dratoꝝ h ⁊ k.q̄drat⁹ ergo k additus quadrato dato a ↄstituit numerum quadratum h.qđ est ꝓpositum.Sed esto secūdo vt sit quadratus a assignatus:sed in duo equalia partiri nō possit.cū ergo binarius eum nō numeret:et sit binarius numerus primus: ergo per primam tertij binarius ad ipm erit primus.quare p decimāquintam tertij binari⁹ nūerabit inferiorem numerum quadrato a:vnitate dempta qui sit b.cuius medietas sit c:⁊ maior eo vnitate sit d:cuius quadratus sit e:et quadrat⁹ c sit f.dico ergo quadratum e abūdare sup quadrato a q̄tum est f quadratus c.Nam quia c bis cū vnitate ↄstituit a:ergo per decimāoctauam primi quod fit ex c in se cū eo qđ fit ex a in dr̄iam d maioris partis ad c:equū est ei qđ fit ex d maiore parte in se.excedit igitur quadratus d quadratum nūeri c in quadrato dato a.nam differētia d ⁊ c erat vnitas.qđ est ꝓpositū.

a — 25
b — 24
d — 13
c — 12
1 6 9
e —
1 4 4
f —

¶ Si quadratus in quadratum ducatur:ꝓduceť quadratus.Si v̄o in non quadratū non quadratus ꝓueniet.Unde pʒ si quadratus quadratum numeret:ipm secundum quadratum numerare. 14

c — 36
4 6 9
a — d — b —
c — 32
a — 4 b — 8

¶ Sint p̄mo a ⁊ b duo quadrati:ducaturq̃ a in b et ꝓueniat c.dico c eē quadratū.Nam p correlariū quarte huius inť a et b est vnus ꝓportiōaliť medius.sit ergo ille d.quia ergo a d ⁊ b sūt ↄtinue ꝓportiōales:ergo p vicesimāsextam secundi quod fit ex a in b:equū est ei qui fit ex d in se.at quod ex a in b ꝓducitur est c.est igitur c quadratus.qđ intēditur.Secūdo:sit a quadratus ⁊ b non quadratus:ducaturq̃ a in b et ꝓueniat c:dico c non esse quadratum.Nam si c esset quadratus p scđam ꝑtem vicesime sexte secundi latus quadrati c eēt medius proportiōalis inter a ⁊ b.quare cū a primus sit quadratus p decimā huius ⁊ b eēt q̄dratus.qđ est ꝯtra hypothesim.Correlariū ex his duabus ꝑtib⁹ satis ↄstat.

¶ Quadratus non quadratum:scđm non quadratum numerat. 15

¶ Nam si ponať possibile quadratū scđm quadratū:ipm numerare:ergo per primam ꝑtem p̄cedētis ꝓductus erit quadratus.at ponitur q̄dratus numerare nō quadratum:seq̄tur igitur ex hoc ↄtrariū hypothesis.quod est propositum.

¶ Si cubus in cubum ducatur:qui producetur erit cubus. 16

c — 216
a — 8 g — 108
e — 4 f — 54
d — 2 b — 27
1

¶ Sint a b duo cubi:⁊ ducatur a in b et ꝓneniat c:dico c esse cubum.Sumo enī latus cubi a quod sit d:et quadratum lateris d q̄ sit e.manifestum est d ⁊ e eē proportiōales inter vnitatem et a.et q̄r q̄ties vnitas in a toties b in c.cū a multiplicet c scđm b.per decimāquartam quarti quot medii ꝓportōales erūt inter vnitatem ⁊ a:totidem erūt inter b et c. sunt ergo duo medij siliter proportiōales inť b et c q̄ sint f g.cū ergo b f g c sint quattuor numeri ꝓportiōales:et b primus per hypothesim sit cubus: ergo per vndecimam huius ⁊ c quartus erit cubus.quod est propositum.

¶ Si in non cubum cubus ducatur:producetur nō cubus. Ex quo liquet ꝙ si cubus cubum numeret:ipm scđm cubum numerare. 17

c — 160 g —
a — 8 f —
e — 4 b — 20
d — 2
1

¶ Ducatur a cubus in numerum b nō cubum et ꝓueniat c:dico c non esse cubum. Nam si c ꝓductus ponatur eē cubus:manifestum est vt in precedenti per decimamquartam quarti quot medij ꝓportiōales erūt inter vnitatem et a:totidem esse inter b ⁊ c.sint ergo similiter duo scilʒ f ⁊ g.quia ergo c g f b sunt ↄtinue proportionales:⁊ c est positus cubus.ergo per vndecimam huius:b etiam erit cubus. at b per hypothesim positus ē non cubus:accidet itaq̃ ↄtrariū hypothesis.qui igitur inde ꝓducetur:nō erit cubus.quod est propositum.Correlarium satis ex hac ⁊ precedenti cognitum est.

¶ Si non cubum cubus numeret:scđm non cubum eum numerabit. 18

Nã si ponat numerari ẽm cubũ: p penultimã qui pducetur erit cubus. at positus est nõ cubus nõ itaqꝫ ipsum numerabit ẽm cubũ: quare si ipsum cubus numeraret: ẽm nõ cubũ nũerabit: qꝺ inteꝺitur.

19 Si quaꝺrati cõmunicant: latera quoqꝫ cõmunicabunt. si vero quaꝺrati sint incommensurabiles: et latera ipsorum incõmensurabilia erunt.

Sint a b ꝺuo quaꝺrati et c latus a et ꝺ latus b: ꝺico primo si quaꝺrati a b cõicant et eorũ latera c ꝺ cõicare. nã si c ꝺ nõ cõicant: ergo per ꝺuoꝺecimã tertij neqꝫ quaꝺrati a b cõicabunt. ex opposito igitur ꝯñtis si quaꝺrati cõicabunt ꝛ eorꝫ latera cõicant. ꝺico scꝺo si quaꝺrati a b non cõicant neqꝫ eorꝫ latera cõicare. nã si c ꝺ latera cõicant est aliqs nũerus eos cõiter numerãs q̃ sit e: qꝛ ergo e numerat c ergo p vicesimãtertiã primi etiã numerat a. et qꝛ etiã e nũerat ꝺ: p eanꝺẽ vicesimãtertiã nũerabit et b. si ergo latera sunt cõmunicãtia et quaꝺrati cõicant: quare ex opposito ꝯñtis si quaꝺrati non cõmunicãt neqꝫ latera cõmunicabunt: quoꝺ est secunꝺũ ꝛ totum propositum.

a 16 b 36
c 4 ꝺ 6
e 2

20 Si cubi fuerit ꝯmẽsurabiles ꝛ latera. ꝗꝫ si cubi nõ cõicent: neqꝫ ipsorꝫ latera cõicabũt

Huius prima pars vt preceꝺentis prima ꝛ secunꝺa vt preceꝺentis secunꝺa patescunt.

21 Si quaꝺrati aꝺ aliquem fuerit proportio tanqꝫ quaꝺrati aꝺ quaꝺratum illum aliquem: quaꝺratum esse necesse est.

Sit a quaꝺratus qui aꝺ aliquẽ numerũ vt b eam habeat pportionẽ que quaꝺrati c aꝺ quaꝺratũ ꝺ ꝺico b esse numerũ quaꝺratũ. nã qꝛ c et ꝺ sunt quaꝺrati per correlariũ quarte huius est vnus meꝺius pportionalis inter c et ꝺ qui sit e. ꝛ qꝛ que pportio c aꝺ ꝺ ea est a aꝺ b: ergo per ꝺuoꝺecimã quarti erit vnus meꝺius proportionalis inter a et b qui sit f. qꝛ ergo a f b sunt pportionales ꝛ a prim⁹ positus ẽ quaꝺratus: ergo per ꝺecimã huius et b tertius est quaꝺratus: quoꝺ est propositum.

81 54 36
a f b
9 6 4
c e ꝺ

22 Quicunqꝫ se hꝫ aꝺ cubũ sicut cubus aꝺ cubũ: iꝺẽ ex necessitate erit cubus.

Si aꝺ a numerũ cubum se habeat aliquis numerus vt b sicut ꝺ cubus aꝺ c cubũ: ꝺico b esse cubum nã per correlariũ quarte huius inter c et ꝺ erunt ꝺuo meꝺij pportionales. et cũ que pportio c aꝺ ꝺ ea sit a aꝺ b. ergo per ꝺuoꝺecimã quarti caꝺent cõsimiliter ꝺuo meꝺij pportionales inter a et b: et a primus ponitur cubus erit igitur et b per vnꝺecimã huius cubus quoꝺ erat ꝺemõstranꝺum.

728 1728
a g h b
27 64
c e f ꝺ

23 Si quaꝺratus in quaꝺratum vel cubus in cubum ꝺucatur: latus proꝺucti erit numerus qui ex latere vnius in latus alterius proꝺucitur.

Sint primo ꝺuo quaꝺrati a b: et latus a sit c: et latus b sit ꝺ. ꝺucatqꝫ a in b: et pueniat e q̃ per ꝺecimãquartã huius erit quaꝺratus: et ꝺucat c in ꝺ: ꝛ pueniat f. ꝺico f esse tetragonicũ latus e. nã per septimã et octauã secunꝺi f est meꝺius pportionalis inter a ꝛ b. et p vicesimãsextaꝫ eiusꝺẽ qꝺ fit ex a in b equũ est ei q̃ fit ex f in se. ẽ igit f latus quaꝺrati e qꝺ erat pbanꝺũ. scꝺo sint g et h cubi laterũ c et ꝺ ꝛ g in h pducat k q̃ per ꝺecimãsextã huius erit cubus. ꝺico f esse latus cubicũ k. qꝛ enĩ c in a pducit g et f in se pducit e erit p nonã quinti pportio g aꝺ e cõposita ex pportionib⁹ c aꝺ f et a aꝺ f. et qꝛ iterũ ex c in ꝺ fit f: et ex ꝺ in b fit h erit per eanꝺẽ nonã pportio f aꝺ h cõposita ex pportionib⁹ c aꝺ ꝺ et ꝺ aꝺ b: sꝫ c aꝺ ꝺ est sicut a aꝺ f: seꝺ et permutati ꝺ aꝺ b sicut c aꝺ f: ꝗꝫ eaꝺẽ esset pportio c aꝺ ꝺ et f aꝺ b. est igitur pportio f aꝺ h equalis pportionibus a aꝺ f et c aꝺ f: quare pportioni g aꝺ e. orꝺinatis ergo quattuor nũeris g e f h: qꝛ que pportio g aꝺ e ea est f aꝺ h. ergo p vicesimãquintã secunꝺi iꝺẽ est nũerus q̃ pꝺucitur ex g in h et ex f in e suũ quiꝺẽ quaꝺratũ quare pꝺucti cubi k latus ẽ f: qꝺ est totũ propositũ.

1728
k
27 144 64
g e h
9 12 16
a f b
3 4
c ꝺ
27 144 12 64
g e f h

24 Si ꝺispositis ab vnitate numeris quaꝺratis: pportionaliter meꝺij inter proximos quosqꝫ sumantur: fient omnes parte altera longiores. et cuiuslibet illorum aꝺ illos ꝺifferentiam lateri suo equalem esse constabit.

Sint e f g h quotlibet nũeri quaꝺrati ab vnitate ꝯñter ꝺispositi: eorꝫ vero latera vnitas: et b c ꝺ numeri ꝯñter ab vnitate sumpti. ꝺico meꝺios pportionales int proximos quosqꝫ quaꝺratos sumptos eẽ altera pte lõgiores. ꝺuco enĩ vnitatẽ in b ꝛ pueniat k q̃ est meꝺius pportionalis inter e ꝛ f. et qꝛ eius latera vnitas et b sunt iequalia sola vnitate ꝺistãtia: p ꝺiffinitionẽ k est altera pte longior. sicr ꝺuco b in c et pueniat l q̃ erit meꝺius pportiõalis int proximos quaꝺratos f g. et per iꝺẽ vt prius altera pte longior. et ita ꝺe reliqs pportionalib⁹ meꝺiis proximorꝫ quaꝺratorũ quotquot ꝯñter assignati fuerit quaꝺrati. Dico preterea ꝺifferentiã k ab quaꝺrato f equalẽ esse b lateri f: et ꝺifferentiã l a quaꝺrato g esse equalẽ c lateri g: et ita cõsequenter. qꝛ enĩ b superat vnitatẽ sola vnitate: intelligo ergo b ꝺiuisum in ꝺuas vnitates. et qꝛ b in se facit f: ergo per ꝺecimãtertiam primi b ꝺuctus in primã ꝛ secunꝺam vnitatem procreat equũ f: seꝺ substracto qꝺ fit ex b in vnavnitate remanet k. est igitur substractũ eius qꝺ fit ex b in vnavnitate ꝺifferẽtia k aꝺ f: seꝺ et iꝺem substractũ est equale b: ꝗꝫ vnitas in quẽcunqꝫ numerum ꝺucta iꝺem faciat. constat ergo iꝺ esse verum ꝺe k. ꝺe l autem consimiliter ostenꝺitur: qꝛ c exceꝺit b sola vnitate. ꝺiuiꝺo ergo c latus scilicet quaꝺrati g in b et vnitatem. ꝛ quia c in se facit g et iꝺem c in b et vnitatem facit equale g: per eanꝺem ꝺecimãtertiam primi: et substracto eo qui fit ex c in vnitatem remanet l. ꝺifferentia igitur l et g est quoꝺ fit ex c in vnitatem: seꝺ ꝛ illuꝺ est equale c per iꝺem quoꝺ prius. constat igitur propositum ꝺe altera parte longiore l. et ita ꝺe quibuslibet aliis argumentabere Similiter etiam ostenꝺes ꝺifferentiam k aꝺ e esse vnitatem: et ꝺifferentiam l aꝺ f esse b et m aꝺ g esse c. Nam cum b sola vnitate superet vnitatem: intellecto ergo b in ꝺuas vnitates ꝺiuiso per ꝺecimamquartam primi quoꝺ fit ex b in alteram vnitatum equale est ei qui fit ex illa in se: ꝛ illa in alteram. seꝺ

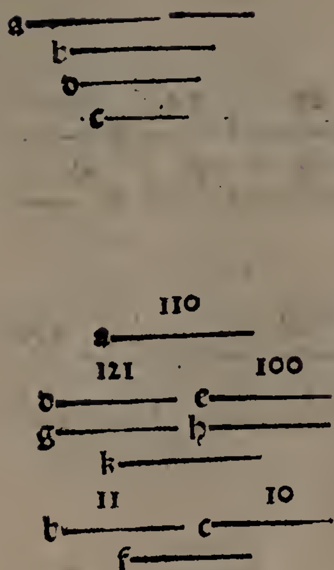
1 4 9 16
e f g h
2 6 12
k l m
1 2 3 4
b c ꝺ

qd fit ex illa vnitate in se est quadratu e et vnitas. et qd fit ex illa in alterā itidē est vnitas et equale vnitati. constat ergo drīam lz ad e esse vnitatē. Similiter diuido c in duas partes scz vnitatē et b: et qr per eandē decimāquartam primi quod fit ex c in b scz l: equū est ei qui fit ex b in se q est quadratus f: et ex b in vnitatem qui est latus b. constat ergo differentiā l ad f esse b: et ita per decimāquartam primi de singulis ostende. constat ergo totum propositum.

Si sumantur ab vnitate numeri altera parte longiores proximis quibusq coniunctis: dimidiis coniunctorum sumptis prouenient omnes quadrati 25

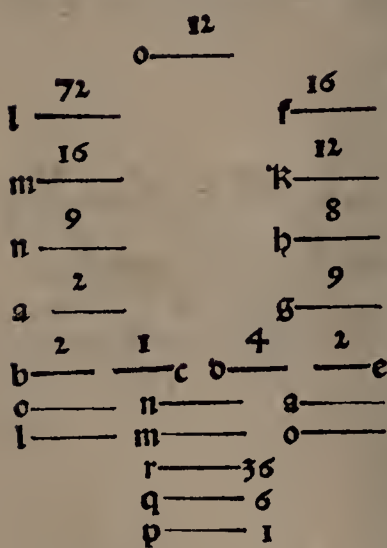
Ut parte altera lōgioribus figuratis quēadmodū in superiori factū est: dico lz et l altera lōgiorū simul sumptorū medietatē esse quadratū. Similiter l et m simul sumptorū medietatē esse quadratū et ita binorū et binorū continue sumptorū quotquot essent: medietatē esse tetragonicā. Nam qa per secundā partem precedentis monstratū est drīam lz minoris ad f esse b: et l maioris ad f etiā esse b: lz et l sunt circūpositi atq equidistātes f. ergo per secūdā primi f est numerorū lz et l simul sūptorū medietas. at f cognoscitur eē quadratū: ergo de lz et l constat propositum esse verū. et cōsimiliter de l et m cōstabit: qr corū differentia ad g per pcedentē est c latus g: quare per secundā primi concluditur quadratus g esse numerorū l et m simul iunctorum medietatem.

Nullus altera parte longior est quadratus vel cubus. 26



Nā si aliqs altera pte longior vt a esset quadratus: per diffinitionē eius latera essent equalia. et qa esset altera pte longior eius latera sola vnitate distarēt. si ergo illa detur et sint b maior et c minor: qa etiā a esset quadratus sit eius tetragonicū latus d. et qr qd fit ex b in c est equale ei q fit ex d in se: ergo per vicesimāsextā secundi b d c sunt cōtinue proportionales qd est ipossibile. Nam cum b et c sola vnitate distēt inter b et c nullus cadit nūerus medius. sed dicat aduersarius d eē equale b aut c. cū ergo b c d cōtinue proportionē oportet b et c esse equalia qd est cōtra hypothesim. At dicat d esse maiorē b et c. tūc ergo b ad d est proportio minoris nūeri ad maiorē: et d ad c proportio maioris ad minorē. et ille ponūtur eedē hoc aūt ipossibile. At dicat vltio d vtroq et b et c esse minorē: et tūc proportio b ad d ē maioris ad minorē et d ad c minoris ad maiorē: et ponunt eedē hoc iterū ipossibile nō est igitur a altera pte lōgior: quadratus qd est primū. ostēdo deinde a altera pte longiorē nō esse cubū. nā si id possibile ē sit a altera pte lōgior cubus et eius lat sint: maius quidē b et minus c et quadratū b sit d et quadratū c sit e: sitq f latus a in eo q cubus: cuius quadratū sit lz. erit eni per correlariū quarte huius vnus medius proportiōalis inter d et lz q sit g. et per idē vnus inter e et lz q sit h: et per septimā secundi q proportio b ad f ea est d ad g: et g ad lz. et similiter q proportio c ad f ea erit e ad h et h ad lz. et qr ex lz in f fit a et idē fit per hypothesim ex b in c: ergo per scdam partē vicesimequinte secūdi erit lz ad b sicut c ad f. et etiā pmutati lz ad c sicut b ad f. erūt igitur inter d et c cōtinue proportionales g et lz et similiter inter e et b. itidem duo h et lz. et qr b et c vel erunt cōmēsurabiles vel cōtra se pmi. si cōmēsurabiles cū b numeret d eius quadratū: ergo per vicesimātertiam primi qcunq numerus nūerabit b etiā numerabit d. quare d et e erunt cōmensurabiles. at tn qr b et c sunt cōtra se pmi d et e esse cōmensurabiles per duodecimā tertij est ipossibile. si aūt b et e sint incōmensurabiles per scdam huius b et e sunt cubi. Similiter si c et d essent cōmensurabiles per idem qd prius d et c essent cōmensurabiles qd per duodecimā tertij est ipossibile. Si aūt c et d sint incōmēsurabiles ergo per scdam huius vterq ē cubus quare inter b et c erūt duo media cōtinue proportiōalia per correlariū quarte huius at nō mō duo verū et vnū quidē incidere mediū vt in prima parte mōstratū est: est ipossibile. cōstat igitur verū esse propositum.

Dato altera parte longiore: alium ab eo altera parte longiorem inuenire cuius ad illum sit proportio que quadrati ad quadratum. 27



Sit a datus nūerus altera pte longior et eius maius latus sit b: minus vero sit c: sitq d duplus ad b et e duplus ad c: et quadratus d sit f: et proximus sub eo quadratus sit g quo nūerus vnitate minor sit h et pte altera lōgior inter f et g sit lz. qr eni per secundā partē vicesimequarte huius drīa f et lz est d: et drīa lz ad g est nūerus eo minor vnitate. ideo drīa lz ad h ē equalis d. et cū drīa d et e sit binarius: qm duplū drīe b ad c. nā per correlariū septime scdi duplatorū: duple sunt drīe. et cū ex d in se fiat f et ex d in binariū qui est drīa eius ad e fiat drīa f ad h: qr fit drīa f ad lz et lz ad h q est dupla ad d: vt postē sum est. erit igitur h reliquus nūerus q fit ex d in e. duco igitur g in h q numeri sola vnitate distare sunt positi: fiatq l altera pte longior quē dico esse: quē querimus. ducatur eni b in h et fiat m: et c in g et fiat n. eritq per octauā secūdi ea proportio l ad m q g ad b. et per eandē etiā ea proportio n ad a que g ad b. quare ea est proportio l ad m que n ad a. et qa ex b in h fit m: et ex c in g fit n: ideo per nonā quinti erit proportio m ad n cōposita ex proportionibus b ad c et h ad g. et qa d in se facit f: et d in e facit h erit proportio f ad h q d ad e. quare et q b ad c: et qa proportio f ad g cōposita est ex proportionibus f ad h equali b ad c et h ad g: ergo proportio m ad n equatur proportioni h ad g. et qa per correlariū quarte huius inter f et g est vnus proportionalis medius erit vnus similiter proportionalis medius inter m et n q sit o. cū sit ergo o ad n sicut m ad o et n ad a sicut l ad m. ergo per equā proportionalitatē indirectā erit l ad o sicut o ad a. capio ergo in proportione l ad o tres numeros in cōtinua proportionalitate mimos q sint r q p: manifestū est r et p esse quadratos: tunc sic q proportio r ad q ea ē l ad o: et q q ad p ea est o ad a: ergo per equā proportiōalitatē que proportio r ad p quadrati ad quadratū ea est l ad a altera parte longioris ad altera parte longiorē: qd est propositū.

Si numeri ab vnitate proportionales disponātur tertium ab vnitate quadratū: atq vno intermisso tertium semper esse quadratū quartū vero ab vnitate cubum et duobus intermissis quartū semper esse cubum: septimū autem quadratū cubicum atq quinq intermissis septimū semper esse quadratum cubicum est necesse 28

Quadratus cubicus est quadratus q̃ pariter est et cubus. Posita enĩ vnitate ⁊ b c d e f g h k l m n o p: vel quotquot voles numeris cõtinue ab vnitate ꝓportionalibus hec statim ex decima ⁊ vndecima huius cognoscit. qr enĩ vnitas potẽtia et quadrat⁹ est ⁊ cubus. ideo per decimã huius c erit quadrat⁹ et p vndecimã d erit cubus. ⁊ per eandẽ decimã e iterum erit quadratus et iterũ per decimã: qr e est quadratus g erit quadrat⁹. Sed et qr d est cubus p vndecimã g etiã erit cubus q̃ venit vt liqdo cõstat septimus ab vnitate: quare septimus ab vnitate quadratus ẽ cubicus. et ita cõtinue procede similẽqꝫ offendes demonstrandi modum vbiqꝫ.

29 Si numerorũ ab vnitate cõtinue ꝓportionaliũ secũdus ab vnitate fuerit quadrat⁹ omnes erunt quadrati. ꝙ si idem fuerit cubus: erunt et omnes cubi.

Prima pars patet. nã per p̃missã etiã terti⁹ erit quadratus. ⁊ q̃a secũdus est quadratus p decimã huius tertius ab illo q̃ est quartus etiam est quadratus. et per p̃missam q̃a tertius est quadratus vno intermisso quĩtus erit quadratus. et ita deinceps quare numerorꝫ ab vnitate cõtinue ꝓportionalium si secũdus est quadratus oẽs erunt quadrati. Scd̃a pars mõstratur. nã si secũdus fuerit cubus: cum quoties vnitas in secũdo toties secũdus in tertio. scd̃us in se q̃ est cubus producet tertiũ: quare p decimamsextã huius tertius erit cubus. et per p̃missam quartus etiã erit cubus. et per vndecimã huius a quolibet illorũ assumptus quartus erit cubus. at illis cõtinue sumptis oẽs sumentur. constat itaqꝫ si secũdus fuerit cubus omnes cubos esse.

30 Si proximorũ altera parte longiorꝫ vnus in aliũ ducat: ꝓueniet altera pte longior

Sint a et b duo hunc in modũ altera parte lõgiores et medius inter eos quadratus sit c cui⁹ latus sit d qd̃ per vicesimãquartã huius erit differẽtia inter a et c ⁊ inter c et b. sitqꝫ a minoris altera parte longioris latus alterũ e. eritqꝫ d maius e vnitate. ⁊ qr d in se facit c et d in e facit a erit ꝓportio c ad a tanq̃ d ad e. Sit itẽ vt ex d in f fiat b erit f vnitate maior d. addat itaqꝫ e ad a et sit cõpositus g: qr ex d in e fit a ex f in e fiet g: vt facile p decimã primi ostẽdatur cũ numerus f numerũ d sola vnitate superet et q̃a f in e facit g et d in e facit a: erit per octauã secundi ea ꝓportio g ad a q̃ est f ad d. sed ⁊ p septimã eiusdẽ etiã b ad c sicut f ad d: quare ⁊ b ad c sicut g ad a. quare pmutatĩ b ad g sicut c ad a: ergo p vicesimãquintã secundi qd̃ fit ex b in a datis altera parte lõgioribus equale est ei q̃ fit ex g in c at q̃ fit ex g in c est altera pte longior p diffinitionẽ: cũ g et c sola vnitate differãt. ꝙ g sit cõpositus ex a et e ⁊ dr̃ia a ab ipso quadrato c sit d: a qua q̃dem dr̃ia d numerus e additus a in cõpositione sola distat vnitate. cõstat igitur numerũ qui ꝓducetur ex b in a esse altera parte longiorẽ. ⁊ propositum.

31 Si ꝓximi quiqꝫ pte altera lõgiores cũ duplo quadrati inter eos cõstituti ꝯponant ꝓueniet quadrat⁹ cui⁹ radix erit ex minore mioris ⁊ maiore maioris laterib⁹ ꝯstituta

Sint enĩ a et b duo quicũqꝫ proximi altera pte longiores et eorũ medius quadratus c. sintqꝫ d e latera altera pte lõgioris a: ⁊ e f latera alti̾us altera pte longioris b. dico ꝙ si a b cõponãtur cũ duplo c totũ aggregatũ vt g esse quadratũ: cuius radix est cõposita ex d et f. nã per vicesimãquartã huius e est dr̃ia a ad c et b ad c: ergo p secundã primi cõpositum ex a ⁊ b est duplũ ad c. at duplũ c cum a b duplo eiusdẽ erunt eius quadruplũ quodq̃dem positũ est g. quattuor igit̃ in c ꝓducũt g. at quattuor nũerus est quadratus cum producat̃ ex duobus in se ductis ⁊ silr̃ c positus est quadratus. ergo p decimãquartam p̃sentis et g est quadratus. et cũ g quadratus quadrupl⁹ sit ad c quadratũ: ergo per tertiã huius ꝓportio lat̃is g ad latus c erit dupla. at cũ e sit radix c et d ⁊ f circũpositi eq̃distent ipsi e. ergo p scd̃am primi d et f simul sunt duplũ e lateris c: quare radix quadrati g est ꝯposita ex d et f: qd̃ est ꝓpositũ.

32 Si duo quilibet proximi quadrati cũ duplo medij inter eos altera pte longioris cõiungãtur: cõpositus erit quadratus latusqꝫ ipsius ex laterib⁹ ipsorꝫ compositũ.

Sint a b duo quilibet proximi quadrati et c medius inter eos altera parte lõgior et d e eorꝫ latera dico quadratos a b cũ duplo c efficere quadratũ vt f cui⁹ latus erit cõpositum ex d e. Nam p vicesimã quartã huius ex d in e fiet c altera parte lõgior inter a et b: quare per nonã primi erunt a et c tanq̃ qd̃ fit ex d in ꝯpositũ ex d e: quodq̃dem cõpositum sit g et per eandẽ c cũ b tanq̃ quod fit ex e in ꝯpositum d e id est in g. et p eandẽ nonã qd̃ ex d et e in g tanq̃ quod fit ex g in se. erit igit̃ quadratũ numeri g tm̃ q̃tum a ⁊ c ⁊ c b: ergo q̃tum a et b ⁊ c bis. fuit enĩ c bis scꝫ semel cũ a et semel cum b sumptũ: sed illud quod fiebat ex a et b ⁊ c bis positũ est esse f. est igitur f quadratus cuius latus est g. et q̃a g est ꝯposit⁹ vt positum est ex d et e lateribus quadratorũ a et b: constat totum propositum.

33 Si ad duos vsqꝫ nũeros vnitate distãtes: oẽs numeri ab vnitate coaceruẽtur: q̃ ex coaceruatione prouenict crit nũerus quadratus latusqꝫ ipsius coaceruatorꝫ maxim⁹.

Sint nũeri ab vnitate dispositi p duos ordies vsqꝫ ad e ⁊ d duos q̃dẽ nũeros vnitate distãtes p̃mus hoc mõ vnitas a b c d e: ⁊ scd̃us hoc mõ vnitas a b c d: ⁊ sit quadrat⁹ e numerus f. dico quadratũ f esse tanq̃ oẽs numeri illorũ duorꝫ ordinũ coaceruati Signo enĩ oẽs quadratos ĩferiores f q̃ sint dispositi p ordinẽ f g h k l vnitas. eritqꝫ g quadrat⁹ d: et h quadrat⁹ c: ⁊ k quadratus b: et l quadrat⁹ a. ⁊ postea vnitas q̃ est p̃me vnitatis quadrat⁹. Intelligo silr̃ m n o p q medios altera pte lõgiores. et q̃a per vicesimãquartã huius dr̃ia f ad m est e: ⁊ dr̃ia m ad g est d. ergo p octauã conceptionẽ dr̃ia extremorꝫ f g ẽ e d. et silr̃ argumẽto dr̃ia g ad h est d c. et dr̃ia h ad k est c b: ⁊ dr̃ia k ad l est b a: et dr̃ia l ad vnitatẽ est a et vnitas. addita ergo vnitate ad a et vnitatẽ: fiet l. et additis b a dr̃ia scꝫ l ad k. ad a ⁊ duplã vnitatẽ. i. ad l: fiet k. addita insup c b dr̃ia k ad h ad b a ⁊ a et duplã vnitatẽ. i. ad k fiet h: ⁊ simil̃r addita d c dr̃ia h ad g ad c b: b a: a et duas vnitates: hoc est ad h: fiet g. et addita e d dr̃ia g ad f ad d c: c b. b a: a et duas vnitates fiet f. per nonam igitur conceptionẽ constat ꝓpositum demonstratum.

30 m — 5 5 d — 4 4 c — 3 3 b — 2 2 a — 1 1

¶ Quicunq; ex numeris ab vnitate bis sumptis coaceruatur: est parte altera longior minusq; laterum ipsius: coaceruatorũ maximus 34

¶ Sint huiusmodi nũeri bino ordine sumpti vnitas a b c d q̃ simul aggregẽtur fiatq; m: quẽ dico eẽ altera pte longiorẽ: eiusq; minus latus eẽ d. nã per p̃cedentẽ si p̃dictis nũeris addo e fiet quadratus f: cuius dr̃ia a medio altera pte lõgiore est e. remoto igiẽ numero e a quadrato f remanet altera pte longior medi⁹ inẽ f ⁊ proximũ minorẽ quadratũ. Sed q̃ remanet ãmoto e est aggregat⁹ duoꝝ assignatoꝝ ordinũ sc; m: igiẽ m est altera pte longior medi⁹ inter f et proximũ minorẽ quadratũ. Sed ille medi⁹ altera pte lõgior fit ex d in e illorũ quadratoꝝ laterib⁹ per vicesimãquartã p̃ntis d aũt minus est: ergo altera pte lõgioris m min⁹ latus ẽ d. at d ordinũ assignatoꝝ maxim⁹ ẽ nũerus. ꝯstat ḡ tota ꝓpõ firma

a 64 — e 16 — b 8 — c 4 — d 512

¶ Si fuerit nũerus q̃dratus cubic⁹: latus quidẽ q̃drati erit cub⁹ latus ṽo cubi q̃drat⁹ 35

¶ Sit a nũerus quadrat⁹ cubicus cui⁹ quatenus quadrati latus sit b: quatenus vero cubi latus sit c: dico b esse cubuʒ et c esse quadratũ. Primũ pʒ. duco enĩ b in a ⁊ fiat d ꝑpalã est d esse cubũ et a cubus ip̃m numerat ẽm b: ergo ꝑ correlariũ decimeseptime huius b est cubus q̃d est primũ. Scd̃m ostẽditur sit e quadratũ c: q2 q̃d sub c et e extremis cõtinetur equũ est ei q̃d fit ex b in se. ergo ꝑ vicesimãsextam secundi e b c sunt continue proportionales sed e primus est positus quadratus: igitur et c per decimã huius est quadratus: sicq; totum constat propositum.

4096 a — d 256 — c 512 — e 128 — b 64 — f 262144

¶ Si fuerint duo numeri quadrati cubici: medius inter illos in continua proportionalitate erit cubus: duorum vero mediorũ vterq; quadratus. 36

¶ Sint a et b duo quadrati cubici: q2 a ⁊ b sunt quadrati ꝑ correlariũ quarte huius ẽ inter eos vnus medius ꝓportionalis q̃ sit c. et q2 a ⁊ b sunt cubi ꝑ idem correlariũ inter eosdẽ sunt duo medij ꝓportionales q̃ sint d ⁊ e. dico ergo c esse cubũ et d ⁊ e esse quadratos. c aũt esse cubũ declaraẽ. nam duco a in b et ꝓueniat f: q2 a ⁊ b sunt cubi: f etiã per decimãsextam huius erit cubus et cũ a c ⁊ b sint proportionales: ergo ꝑ vicesimãsextam secũdi f cubus fiet ex c in se. quare f est quadratus ipsius c. est igitur f quadrat⁹ cubicus: quare c latus f vt quadrati per p̃cedentẽ est cubus q̃d est primũ. sed d et e esse quadratos hinc liquet: q2 b e d sunt cõtinue proportionales et b primus est quadratus. igitur ⁊ tertius d per decimã huius. Item a d et e sunt numeri ꝓportionales et a primus est quadratus igiẽ per eandẽ decimã ⁊ e tertius quadratus. Est igitur tota propositio nota.

729 a — 243 b — 81 c — 27 d — 9 e — 3 f — 386691489 g — 14348907 h — 59049 k — 19683 l — 729 m — 27 n — o — p — q — r — s — t

¶ Duos q̃dratos cubicos inuenire: inẽ quos nũeri quotlibet medij ꝓportiõalr̃ sumãẽ 37

¶ Si duos q̃dratos cubicos iubeor inuenire inter quos quotlibet inẽiaceãt medij ꝓportionales sumo nũeros ꝓportionales plẽs duobus: ipsis mediis: quos iubeor inuenire. verbi cã si iubeor inuenire duos quadratos cubicos inẽ quos sint quattuor medij ꝓportionales sumo sex nũeros cõtinue ꝓportiõales vt a b c d e f: quorũ per ordinẽ sumãtur cubi g h k l m n: q̃ per sextã huius sunt etiã ꝓportionales quiquidẽ cubi in se per ordinẽ ducãtur et prouenĩãt o p q r s t. dico itaq; o et t esse duos tales quadratos cubicos. nã cum g h et ceteri in se ducãtur o p q ⁊ ceteri sunt quadrati: et q2 g h ⁊ ceteri eorũ scʒ latera sunt ꝓportiõales: per quintã huius o p q et ceteri eorũ quadrati sunt ꝓportionales. at cum g et n sint cubi ergo per decimãsextã huius o et t erunt cubi. sunt igitur o et t quadrati cubici inter quos quattuor numeri p q r s sunt medij proportionales: q̃d est propositũ.

12 c — q m — g — 2 a — p l — f — 3 b — o k — e — n h — d — m g — r

¶ Duos q̃dratos cubicos reꝑire: inẽ q̃s medios ẽm datos nũeros sumẽ sit possibile

¶ Sint dati nũeri a ⁊ b: ꝓpositũq; sit duos quadratos cubicos inuenire: inter quos sint numeri ꝓportionales ẽm a ⁊ etiã ẽm b: sitq; a binarius et b ternari⁹. q̃a enĩ ꝓportiones semꝑ sunt vno plures ipsis mediis et a est binarius: iõ vt medij inueniãtur ẽm a oportet tres esse ꝓportiones. et q̃a b est ternari⁹ vt inueniãtur medij scd̃m b opʒ quattuor esse ꝓportiones. Duco ergo tria in quattuor et prouenĩat c et scd̃m c ordino cõtinue ꝓportiões in nũeris r d e f g h k l m n o p q: quoꝝ q et r ꝑ p̃cedentẽ ponantur quadrati cubici: et ꝯiũgo quattuor ex illis ꝓportiõib⁹ vt hic scd̃m quaẽnos et q̃ternos ordĩes: ⁊ hẽbo tres medios ꝓportiõales scʒ n k f ꝑ equã ꝓportiõalitatẽ. ⁊ siľr ꝯiungo tres ex illis vt hic ꝑ quinos ⁊ q̃nos ordines et hẽbo m ⁊ g duos medios ꝓportiõales inẽ q et r quadratos cubicos: q̃d est ꝓpositũ 38

6 a — 12 g — 24 b — 3 c — 6 e — 2 d — 4 f

¶ Inẽ q̃slibet duos suꝑficiales siľes: tertiũ in ꝯtinua ꝓportiõalitate mediũ eẽ neccẽ est

¶ Sint a et b nũeri suꝑficiales siľes: et latera a sint c ⁊ d: et latera b sint e ⁊ f. dico inẽ a et b eẽ vnũ numerũ in cõtinua ꝓportionalitate. nã q̃a a et b sunt siľes ꝑ diffinitionẽ eius latera sunt ꝓportionalia. 39 ideo q̃ ꝓportio c ad d: ea est e ad f. quare ꝑmutatĩ q̃ ꝓportio c ad e: ea est d ad f. duco ergo e in d et fiat g: et q̃a c in d facit a: et b in eundẽ d facit g: ergo ꝑ octauã scd̃i ꝓportio a ad g vt c ad e. ⁊ q̃a iterũ e in d facit g et e in f facit b: ergo ꝓportio g ad b vt d ad f. sed ꝓbata est ꝓportio c ad e vt d ad f: ergo proportio a ad g vt g ad b. est igitur inter a et b nũerus ḡ medius ꝓportionalis: q̃d erat demõstrandum

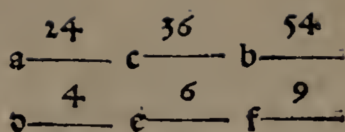
9 a — 12 c — 16 b — 3 d — 3 f — 4 e — 4 g

¶ Q̃ si terti⁹ inẽ eos medi⁹ ꝓportiõalr̃ ceciderit: duo q̃libet nũeri erũt suꝑficiales siľes

¶ Hec est cõuersa p̃cedẽtis. Sint enĩ a et b q̃cunq; duo nũeri inter quos sit c medi⁹ ꝓportiõalis: dico a et b suꝑficiales eẽ ⁊ siľes. capio enĩ d e minimos in ꝓportione a ad c q̃ q2 mimi per decimãnonã tertij numerabũt a et c equalr̃: sitq; id scd̃m f et siľr nũerabũt c et b equalr̃: sitq; id scd̃m g manifestũ itaq; 40 est cũ a sub duobus lateribus d et f: et b sub duobus e g cõtineaẽ: a et b ꝑ diffinitionẽ esse suꝑficiales. Sed ꝙ sint similes pʒ. nã q2 per hypothesim d et e numerãt c et b secundũ g: d numerat c scd̃m g: et e numerat c secundũ f vt et positũ est. igitur per vicesimãquintã secundi d f et e g sunt proportionales: sʒ d f sunt latera a: et e g sunt latera b. sunt igiẽ a et b per diffinitionẽ suꝑficiales siľes: q̃d est ꝓpositũ.

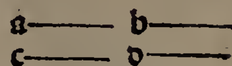
41 ¶ Si fuerit duo nūeri supficiales sil'es: erit ꝓpor° vni⁹ ad alteꝝ tāq̄ q̄drati ad q̄dratū

¶ Sint a et b duo supficiales similes: dico ꝓportionē a ad b esse q̄ quadrati ad quadratū. nam ꝑ ante p̄missam erit inter eos vnus medius ꝓportionalis q̄ sit c. Sumo ergo tres minimos in eoꝝ ꝓportiōe q̄ sint d e f ꝑ primā huius d ꝛ f erūt quadrati. et cum q̄ ꝓportio d ad e ea sit a ad c. ꝛ q̄ e ad f ea sit c ad b ergo ꝑ equā ꝓportionalitatē q̄ ꝓportio d ad f quadrati ad quadratū ea est a ad b: qd̄ est propositū.



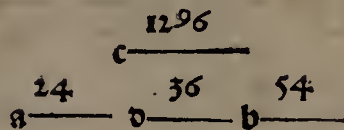
42 ¶ Si duorum numerorum proportio fuerit que quadrati ad quadratum illos superficiales similes esse necesse est.

¶ Hec est cōuersa precedētis. Sint a et b quadrati ꝛ sit ꝓportio c ad d q̄ a ad b: dico c d numeros esse supficiales sil'es. Nam ꝑ correlariū quarte hui⁹ est vnus medi⁹ ꝓportiōalis inꝩ a ꝛ b. q̄re ꝛ ꝑ duodecimā quarti vn⁹ erit medi⁹ ꝓportiōalis inꝩ c et d. q̄re ꝑ 40 hui⁹ c ꝛ d sunt supficiales sil'es: qd̄ ē ꝓpositū



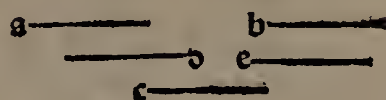
43 ¶ Si duoꝝ superficialiū similiū alter in alterū ducaꝩ: quadratus numerus produceꝩ.

¶ Sint a et b supficiales similes: ducaturq̄ a in b ꝛ ꝓueniat c: dico c esse quadratū. Nam ꝑ tricesimā nonā huius inter a ꝛ b est vnus medius ꝓportionalis q̄ sit d. q̄a ergo a d b sunt cōtinue ꝓportiōales per vicesimāsextam secundi idem est qui fit ex a in b ꝛ ex d in se. at qd̄ ex d in se fit est quadratū: igitur et c quod fit ex a in b: quod est propositum.



44 ¶ Si ex ductu duorum numerorum vnius in alterum producatur quadratus: illos duos superficiales similes esse conueniet.

¶ Hec conuertit precedentē. vt si ex a in b producatur c quadratus: dico a et b esse supficiales similes Nam per vicesimāsextam secundi latus tetragonicum c erit medius proportionalis inter a et b. ergo per quadragesimā huius a et b sunt superficiales similes: quod intenditur.



45 ¶ Si duo numeri superficiales vni fuerint similes: erunt et inter se similes.

¶ Sint a b duo numeri supficiales similes c: dico a et b esse inter se similes. Nam q̄a a ē similis c inꝩ a et c est vnus medius proportiōalis qui sit d. et q̄a b etiam similis c inter b ꝛ c similiter vnus medius proportionalis qui sit e. igitur per decimāsextam quarti et inter a ꝛ b erit vnus medius ꝓportionalis quare per quadragesimā huius a et b erunt superficiales similes: et propositum.

46 ¶ Si aliquis numerus in superficialem ducatur: proueniens erit solidus.

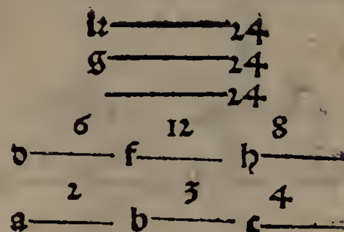
¶ Nam superficialis fit ex ductu numeri in numerū facta vna multiplicatione. qui igitur ex ductu alicuius in ipsum producetur tribus lateribus cōtinebatur cōtinua facta multiplicatione. quare per diffinitionē erit solidus: quod intendebatur.

47 ¶ Omnis solidus ab aliquo superficiali numeratur.

¶ Nam oīs solidus per diffinitionē habet tria latera quoꝝ tertium ducīꝩ in productū ex reliquis. at talis ꝓductus est supercialis. numeraꝩ igitur oīs solidus ab aliquo supficiali vt proponebaꝩ.

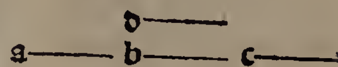
48 ¶ Datis trib⁹ nūeris cū triplici mō solid⁹ ꝓcreeꝩ: vnus tū idēq̄ erit q̄ ex oib⁹ ꝓduceꝩ

¶ Sint tria latera a b c: et primo ex a in b fiat d: ꝛ ex c in d fiat solidus e. scd̄o ex b in c fiat f et ex a in f fiat solidus g. tertio ex a in c fiat h et ex b in h fiat solidus k. dico tres solidos e g k ex tribus laterib⁹ triplici mō creatos eosdē esse atq̄ equales. Nā q̄ a in b facit d: et c in b facit f. ergo ꝑ octauā secundi d ad f vt a ad c. ergo ꝑ vicesimāquintā secūdi idē est q̄ fit ex a i f et c in d: sed a in f facit g ꝛ c in d facit e sunt igiꝩ e g solidi equales. Itē q̄ ex b in c fit f et ex a in c fit h: ergo ꝑ eandē octauā que ꝓportio b ad a ea est f ad h. ergo ꝑ vicesimāquintā secundi iterū idem fiet ex a in f et b in h. sed ex a in f fit solidus g: et ex b in h fit solidus k. sunt igiꝩ solidi e ꝛ k adiuicē equales: sed et solid⁹ e posit⁹ est equalis solido g q̄ ꝑ cōem sciam k et e sunt solidi eq̄les. sunt igiꝩ vt ꝓponebaꝩ tres solidi e g k adiuicē eq̄les: ꝛ ꝓpositū



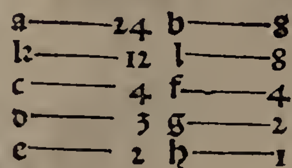
49 ¶ Omnis numerus a tribus numeris numeratus solidus esse probatur.

¶ Sint a b c tres nūeri numerātes d: dico d esse numeꝝ solidū. nā vel a est p̄mus vel ꝯposit⁹. si ꝯposit⁹ ergo ꝑ quadragesimāsextā huius q̄cunq̄ nūerus in ipm̄ ducaꝩ ꝓducet solidū: sicq̄ cōstabit propositū. Si aūt sit prim⁹ q̄ b nūerat d fm̄ aliquē numerū: ergo ꝑ quartā tertij a numerat b: vel alterū fm̄ quē nūerat. quare b aut is fm̄ quē nūerat est supficialis. erit itaq̄ ꝑ quadragesimāsextā: vt prius d solid⁹.



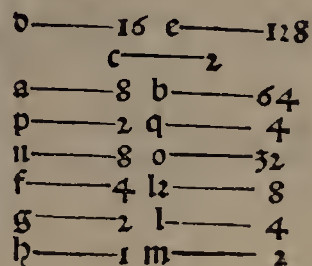
50 ¶ Oīm duoꝝ solidorū ꝓportio: ē ex laterū vni⁹ ad latera alteri⁹ ꝓducta ꝓportiōib⁹.

¶ Sint a et b duo solidi: sintq̄ c d e latera a: et f g h latera b. dico proportionē a ad b esse cōpositā ex ꝓportionibus c ad f: d ad g: ꝛ e ad h. duco enī c in d et ꝓueniat k ꝛ f in g et prouenīat l. ꝑ nonā igitur quinti proportio k ad l cōposita est ex proportionibus c ad f ꝛ d ad g. et q̄ per quadragesimāoctauā huius si e ducatur in k: et h in l proueniēt a ꝛ b. ergo per nonā-quinti proportio a ad b vt k ad l et e ad h: sed proportio k ad l monstrata est cōposita ex c ad f et d ad g. ergo proportio a ad b composita est ex proportionibus c ad f: d ad g: et e ad h: quod est propositum.

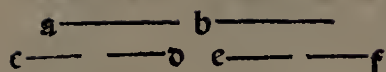


51 ¶ Si duo solidi sil'es alios duos equaliꝩ numerēt: illos quoq̄ solidos sil'es eē necē ē.

¶ Sint a b duo solidi similes: numerētq̄ d c equaliter vt secundū c. dico d e pariter eē solidos similes assigno enim f g h latera a: et k l m latera b. ducoq̄ f in g ꝛ ꝓueniat n et k in l ꝛ ꝓueniat o. et q̄ h in n ꝑ quadragesimāoctauā huius facit a: et m in o facit b. est itaq̄ n in a fm̄ h: et a in d fm̄ c. ergo ꝑ vicesimātertiā primi n est in d secundū productū ex c in h q̄ sit p. et similiter q̄ o est in b fm̄ m et b in e fm̄ c: per eandē vicesimātertiā o est in e fm̄ productū ex c in m q̄ sit q. ꝛ q̄ c in h facit p et c in m facit q. ergo que ꝓportio h ad m ꝑ septimā secundi ea est p ad q: quare ꝛ q̄ f ad k: et g ad l. sed p in n facit d ꝛ q in o facit e vt monstratū est. Sed tm̄ est f in g q̄tum n: et k in l q̄tum o. ergo p f g in se faciēt d: et q k l in se

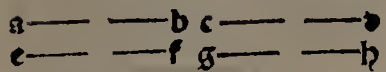


facient e.sunt ergo d et e solidi et latera d sunt p f g et latera e sunt q k l. sed illa probata sunt proportionalia: ergo d et e sunt etiam similes: quod est totum propositum monstratum.



Inter quoslibet duos solidos similes: duo numeri in continua proportionalitate medii intercidunt. 52

Nam per penultimam propositionem erit proportio unius illorum solidorum ad reliquum tanquam lateris ipsius ad latus alterius proportio triplicata. Sumam ergo quattuor numeros in proportione lateris ad latus. et quia primi ad quartum erit proportio lateris ad latus triplicata: illa erit eadem proportioni solidi ad solidum. ergo per duodecimam quarti quot media sunt inter primum et ultimum tot erunt inter solidum et solidum. at media sunt duo: ergo inter solidum et solidum itidem erunt duo: quod est propositum



Si fuerint quattuor numeri continue proportionales: duo extremi erunt solidi similes. 53

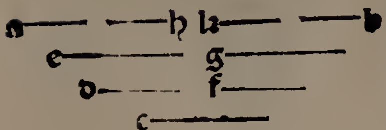
Hec est conversa precedentis. Sint a b c d quattuor numeri continue proportionales: dico a et d esse solidos similes. Sumo enim e f g h quattuor illius proportionis minimos qui si cum assignatis iidem fuerint cum per secundam huius e et h sint cubi similiter a et d erunt cubi. quare solidi similes sicque firmum stabit propositum. Porro si iidem non sint cum e et h per quintam quarti sint contra se primi: quare per vicesimam tertiam in sua proportione minimi et per decimamnonam eiusdem equaliter numerabunt a et d. sed e et h cum per secundam huius sint cubi ipsi sunt solidi similes. ergo iterum per quinquagesimamprimam huius a et d sunt solidi similes: quod est propositum.

Omnium duorum solidorum similium: est proportio unius ad alterum tanquam cubi ad cubum. 54

Sint a et d solidi similes: dico proportionem a ad d esse proportionem tanquam cubi ad cubum. quia per quinquagesimamsecundam huius inter a et d sunt duo medii proportionales. sint ergo illi b c: capio ut prius e f g h in illa proportione minimos quorum per secundam huius constat e et h esse cubos qui si iidem sint cum predictis constat propositum si non identidem: quia per equam proportionalitatem que proportio e ad h cubi ad cubum eadem est a ad d: quod iterum est propositum

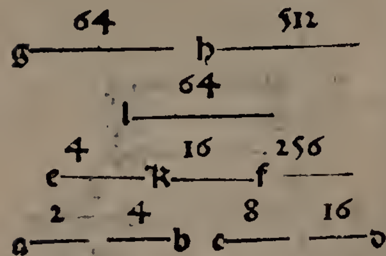
Et si unius ad alterum fuerit proportio tanquam cubi ad cubum: quoslibet duos numeros solidos similes esse necesse est. 55

Hec est conversa precedentis que ideo vera esse convincitur: quia per correlarium quarte huius inter quoslibet cubos duo inscipiantur medii proportionales. igitur per duodecimam quarti et inter illos solidos itidem duo inflacebunt medii proportionales. ergo per 53 huius duo extremi qui erunt solidi assignati erunt solidi similes: quod est propositum



Si fuerint duo solidi uni solido similes: ipsi quoque inter se erunt similes. 56

Sint a b duo solidi similes solido c: dico a et b esse solidos inter se similes. Nam quia a c sunt solidi inter se similes: ergo per quinquagesimamsecundam huius inter a et c sunt duo medii proportionales qui sint d e. et similiter per eandem inter b et c qui sint f g. igitur per decimamseptimam quarti duo similiter erunt inter a et b. quare a et b per quinquagesimamtertiam huius inter se sunt solidi similes: quod erat demonstrandum.



Si fuerint quattuor numeri proportionales et duorum extremorum quilibet in quadratum alterius ducatur: provenient cubi aliorum. 57

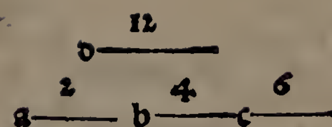
Sint a b c d quattuor numeri continue proportionales: sitque e quadratum a et f quadratum d ducaturque d in e et proveniat g et a in f et proveniat h. dico igitur g et h esse cubos b et c. duco enim b in se et fiat k: quia e et k sunt quadrati quorum latera sunt a b erit per tertiam huius proportio e ad k tanquam proportio a ad b duplicata: quare tanquam b ad d: ergo per vicesimamquintam secundi idem est qui fit ex b in k et e in d. sed qui fit ex b in k est cubus b. qui autem ex e in d est g: igitur g est cubus b. similiter si ducatur c in se et fiat l erit per eandem tertiam huius proportio l ad f tanquam a ad b duplicata. quare tanquam a ad c: quare per vicesimamquintam secundi ut prius idem erit qui fit ex c in l et a in f: qui autem fit ex c in l est cubus c: et qui fit ex a in f est h igitur h est cubus c: quod est propositum.

Datis lateribus sive laterum proportionibus: solidorum summam habitudinemque investigare. 58

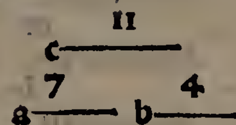
Hec in solidis continuis eque et discretis eandem habet veritatis certitudinem. si primo detur latera duc quecunque illa in seinuicem tria scilicet unius et tria alterius et provenient statim per quadragesimamoctavam huius solidorum summe. si autem laterum proportiones detur compone per tertiam quinti laterum proportiones: sive eas per sextam quinti continua et proportio ex laterum proportionibus composita per quinquagesimam huius aut que ex continuatis componetur: erit proportio solidi ad solidum sicque nota erit solidorum habitudo atque totum quod propositio proponit notum. Sexti elementorum arithmetices Jordani finis.

Par numerus est qui in duo equalia dividi potest. Impar est in quo aliqua prima pars est absque pari: additque supra parem unitatem. Parium numerorum alius pariter par: alius pariter impar: et alius impariter par. Pariter par est quem nullus impar numerat. Pariter impar est quem quicunque pares numerant: cum secundum imparem numerant. Impariter par est quem quidam par secundum parem et quidam secundum imparem numerant. Medius inter duos numerus dicitur: qui inter eos positus equaliter ab utroque distat. Medii dicuntur duo numeri qui non habentes aliquem interpositum: equales habent ad extremos differentias. Perfectus numerus appellatur qui ex omnibus suis partibus coniunctis perficitur. Abundans dicitur: ad quem omnes sue partes comparate: maius habere reperiuntur. Diminutus vero cuius partes coniuncte omnes minus ipso constituunt.

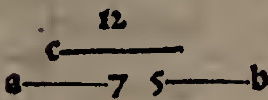
1 ¶ Si quotlibet sibi coaceruentur pares: qui proueniet erit par.
¶ Nam ex diffinitiōe paris quotquot assignabūtur eoꝝ ꝗlibet h͡z medietatē. at oēs eoꝝ medietates ꝑ sextā primi adinuicē coniūcte: coaceruati dimidiū cōstituūt. coaceruatus igitur cum in duo equa diuidi possit erit par: quod intendebatur.



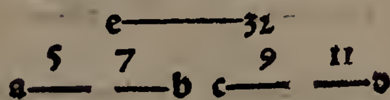
2 ¶ Si par et impar coniungantur: compositus erit impar.
¶ Nam si ab impari auferatur vnitas cū solam vnitatē per diffinitionē super parē addat: relinqͥtur par. qui si addatur alteri pari: per p̄cedentē compositus erit par. cui quidē si ablata restituatur vnitas: totus per diffinitionē fiet impar. at ille erit ꝗ ex pari ⁊ ipari cōstat. ratū est ergo qđ propō intēdebat.



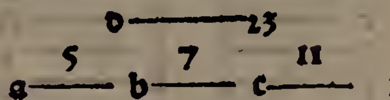
3 ¶ Si impar impari addatur: proueniet numerus par.
¶ Nam si ab vtroqꝫ eorum dematur vnitas relinquētur duo pares qui per āteprēmissam cōstituent numerū parem: cui quidē composito si iungātur due ablate vnitates que parē constituunt per eandē anteprēmissam totus rursum euadet par. hoc autē intendebat propositio.



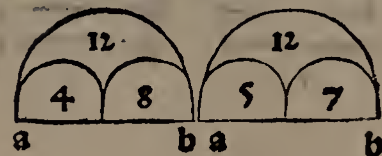
4 ¶ Si impares numero pares sibi coaceruētur: totus ex eis cōflatus erit par.
¶ Nā cū nūerus quo eos sumimꝰ sit par: in eo binariꝰ aliquoties sumetur ꝗ toties ꝑ p̄cedentē binario copulati erūt pares. igitur per primā huiꝰ adinuicē simul additi ꝯstituunt numeꝝ parē: qđ est ꝓpositū.



5 ¶ Si impares numero impares coaceruentur: cōpositus erit impar.
¶ Nam si vnus eoꝝ omittatur per precedentē compositus erit par: ergo per secundā p̄ntis si ꝯposito addatur omissus īpar: totus ꝗ inde nascitur ex oībus compositus erit impar qđ est propositū.

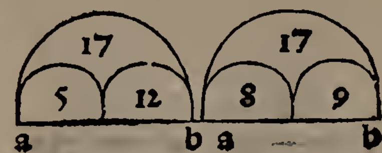


6 ¶ Si a pari detrahatur par: relinquetur par.
¶ Nam si relinqͥretur impar: idem cum detracto additus per secundā presentis cōstituisset imparē: quod est contra hypothesim. verum igitur est propositum.



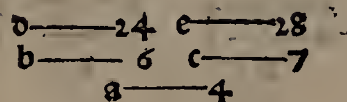
7 ¶ Si impar a pari tollatur: residuus erit impar.
¶ Nam si residuus poneretur par: idem detracto appositus per secundā huius cōstituisset imparē: quod est contra hypothesim. erit igitur verum propositū.

8 ¶ Si ab impari impar tollatur: remanebit par.
¶ Nam si remaneret impar: idem ablato additus per tertiā huius cōstituisset parem: at positus est impar. relinquitur igitur par: quod est propositum.

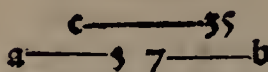


9 ¶ Si par impari substrahatur: reliquus erit impar.
¶ Nam si residuus esset par: substracto additus ꝑ primā huius cōstituisset parē: quod est contra po-situm. relinquitur igitur propositum verum.

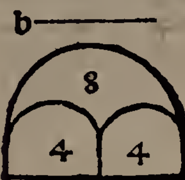
10 ¶ Omnis numerus per parem multiplicatus: parem producit.
¶ Nā si multiplicat parē ꝑ diffinitionē toties multiplicatꝰ erit in ꝓducto quoties vnitas in mltipli-cāte. ⁊ cū multiplicatꝰ sit par tot illi pares simul additi ꝑ primā huiꝰ ꝯstituūt ꝓductū parē. si aūt mlti plicet īparē ꝑ idē toties erit mltiplicatꝰ ipar in ꝓducto quoties vnitas in mltiplicāte. at vnitas in eo ponitur esse in numero pari: ergo ꝑ quartā huius illi impares: nūero pares simul additi ꝯstituunt iteꝝ parem: quod est totum propositum.



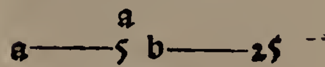
11 ¶ Si impar in imparem ducatur: qui producetur erit impar.
¶ Nam multiplicatus impar per diffinitionē toties erit in producto quoties vnitas in multiplicāte impari. at in illo vnitas est in numero impari. igitur per quintā huius illi impares et numero quidē impares simul additi cōstituent productū imparem: quod est propositum.



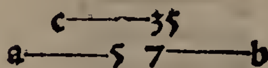
12 ¶ Quemcunqꝫ par numerat: cum esse parem necesse est.
¶ Nam par numerās ꝑ diffinitionē pōt in duo equa diuidi in cuius medietates si numerꝰ secundū quē numerat ducatur: per nonā primi eundē productū ꝓducit. at idē numerꝰ in alterā medietatū ductꝰ ꝓducti ꝓducit dimidiū. igitur ꝓductus vt ꝗ pōt in duo equa ꝑtiri ꝑ diffinitionē est par: qđ est ꝓpositū.



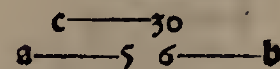
13 ¶ Quicunqꝫ imparem numerat: impar est
¶ Nam si ponas ꝙ ꝗ eum numerat sit par: per precedentē numeratus erit par: quod est contra hypo thesim. qui igitur eū numerabit si quis numeret: erit impar: quod est propositum.



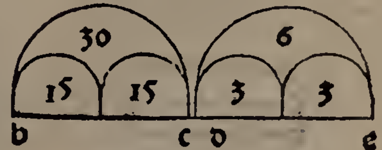
14 ¶ Si impar imparem numeret: secundum imparem eum numerabit.
¶ Nam si impar numeraret imparē secundū parem: ergo alternati per octauā primi par numeraret eundē secundū imparē: quod ꝑ duodecimā huius est īpossibile. verum igitur propositū.



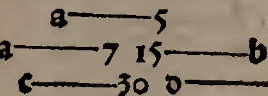
15 ¶ Si impar parem numeret: secundū parem eum numerare conueniet.
¶ Nam si impar secundū imparē eum numeraret: ergo ꝑ vndecimam huius totus esset impar. at po situs est par. accideret itaqꝫ contra hypothesim. relinquetur igitur propositum.



16 ¶ Si parem impar numeret: dimidium quoqꝫ ipsius numerabit.
¶ Nam si impar parem numeret: per premissam secundū parem eū numerabit. cum itaqꝫ omnis par medietatē habeat impar ergo ille per illius medietatē multiplicatus per octauam et nonam primi producet totius medietatē. numerabit igitur impar ille: numerati dimidiū: quod est ꝓpositum



17 ¶ Si nūerus ipar ad aliquē numeꝝ fuerit primꝰ: idē quoqꝫ ⁊ ad eius duplū erit p̄mꝰ
¶ Sit si īpar a sit primus ad b dico ip̄m esse primū ad c duplū b. nā si nō fuerit primus ad c ergo a ⁊ c cōicabunt. erit igitur ꝑ diffinitionē numerus cōiter numeros a et c numerās: qui sit d. ⁊ qͣ d nūerat a ⁊ c: et c est par qꝛ duplus b. et ideo ꝗ pōt in duo equa partiri: igitur ꝑ precedentē d etiā numerabit d dimidiū c. quare a ⁊ b cōicabunt: quod est contra hypothesim. erit igitur a primus ad c: qđ est ꝓpositū.



f	7		o	14
e	6	sesquisexti	n	12
d	5	sesquiquinti	m	10
c	4	sesquiquarti	l	8
b	3	sesquitertii	k	6
a	2	sesqualteri	h	4
	1	Dupli	g	2

¶Si dispositorum ab vnitate numerorū secundū naturalem seriem: omniū dupli sumantur: prouenient omnes pares ab vnitate: eruntq; parium eodē ordine sumpte que et numerorum ab vnitate dispositorū proportiones. 18

¶Dispono numeros ab vnitate secundū naturalē seriem vnitas a b c d e f: quorum per ordinē sumo duplos g h k l m n o. dico primo oēs pares ab vnitate vsq; o esse acceptos. secūdo q̄ proportiones sunt numerorum ab vnitate dispositorum: vt a ad vnitatē: b ad a: c ad b: d ad c: e ad d ⁊ f ad e: tales esse per ordinē in ordine parium: vt h ad g et k ad h ⁊ l ad k et ita ceterorum. Primū patet. nam primo duplos esse pares manifestū est cum quilibet eorum in duo dimidia que equa sunt diuidi possit. Et q nullus alius ab acceptis sit par certū est qz talis nō haberet mediū in numeris: q si haberet vllū coincideret cū aliquo assignatorum. certū est ergo oēs pares fuisse acceptos. Secundū patet. nā que proportio a ad h: ea est vnitatis ad g. ergo permutati per tertiā secūdi q̄ proportio a ad vnitatē: ea est h ad g. Itē que b ad k: ea est a ad h. ergo per eandē q̄ b ad a: ea est k ad h. et ita per eandē consilr procede ⁊ totū firmū cōcludes propositū.

f	7	n	13
e	6	m	11
d	5	l	9
c	4	k	7
b	3	h	5
a	2	g	3
	1		

¶Si numerorum ab vnitate naturali serie dispositorū: duo ⁊ duo continue cōiungātur fient oēs ipares ab vnitate. ipsorūq; impariū proximi quiq;: erunt contra se primi. 19

¶Disponat ordo numerorum ab vnitate sm eorum naturalē seriem: cōiungāturq; quiq; duo ⁊ duo proximi. dico primo omnes ab vnitate fieri ipares. scdo vero quosq; duos proximos esse contra se primos. Primū patet. nā quicunq; duo proximi in naturali serie numerorum per diffinitionē sola vnitate distāt: q̄re eorum alter est par et alius ipar. ipsi igitur simul additi per secundā huius totū constituūt imparē. Sed q nullus sit impar preter illos sic cōstat alioquin nō posset ille impar diuidi in p̄mas partes quarum vna super alterā addit vnitatē quod est contra diffinitionē. aut si diuidat cōstituetur ex duobus numeris in naturali serie numerorum proximis qd est propositum. Secundū patet. nā cum oīs impar ab vnitate addita vnitate ⁊ vnitate substracta habeat circūpositos pares: et oīs par circūpositos impares ab eo sola vnitate distātes per cōceptionē igitur dr̄ia quorūcunq; proximorum impariū est binarius. at binarius est numerus primus cū a nullo alio nūero preter vnitatē numeret. additus igitur binarius q est numerus primus vnitati cōstituet primū imparē numerum primum: q quidem binarius numerus primus additus ternario numero etiā primo: per primā tertij cōstituet numerum ad alterum primū. Itidē ⁊ per nonā tertij argumētabere: ⁊ ita de quibuslibet duobus proximis ostendere perfacile est: qd est propositū.

f	64	n	729
e	32	m	243
d	16	l	81
c	8	k	27
b	4	h	9
a	2	g	3
	1		1

¶Si numerorum ab vnitate proportionaliū secundus ab vnitate fuerit par reliquos oēs pares esse: q si idem fuerit impar: reliquos itidem ipares esse necesse est. 20

¶Nā si secūdus est par q a numerat ab vnitate scdus nūerabit tertiū ⁊ tertius quartū: sicq; deinceps quare per vicesimātertiā primi scdus q est par nūerabit oēs reliquos. sunt igit reliq oēs per duodecimā huius pares qd est propositū quo ad hoc. et si scdus est ipar q a nūerat ab vnitate: id ipse in se ductus nūerabit tertiū et per vicesimāquintā scdi tertius sm eundē quartū ⁊ ita deinceps. igitur per vndecimā huius eorum quilibet erit impar: quod est totum propositū.

b	8	e	7
c	6	f	5
a	4	d	3

¶Inter quoslibet duos numeros quorum vterq; par est aut vterq; impar: vnus est medius q si vnus fuerit medius vtrūq; parē aut imparē esse necesse est. 21

¶Nā si vterq; fuerit par: ipsi simul additi per primā huius cōstituunt numerū parem. ⁊ si vterq; fuerit impar per tertiā huius idē eueniet. si itaq; illius sumat medietas per scdam partē secunde primi illa erit nūerus a quo illi numeri eqdistabūt per diffinitionē. igit numerus ille erit inter illos medius. Scdm pz nā si int eos sit medius per primā partē scde primi idē duplicatus est tanq̄ illi cōiūcti q cū sit par eo q est duplus si alter eorum sit par: per sextā huius et reliquus. et si alter eorum sit ipar per septimā eiusdē ⁊ reliquus quod est propositum.

c	13
a	4
d	6
e	7
b	9

¶Inter parem et imparem vel nullus est medius vel duo: q si duo fuerint inter eos medij: alterum parem ⁊ alterum imparem esse cōuincitur. 22

¶Si vnitate distiterit par atq; ipar: inter eos nullus incidet medius. q si āplius qcunq; distiterint vt par a et ipar b: dico int a ⁊ b eē duos medios. nā per secundā huius a et b iūcti cōstituūt numerum iparē vt c. q per nonā eiusdē diuidi poterit in duos vnitate distātes q sint d e: quos dico per tertiā primi equidistare a et b. quare per diffinitionē sunt medij qd est primū. Scdo dico q si inter a ⁊ b sint duo medij alterū esse parē ⁊ alterum imparē. nā si duo vt d e interiacēt medij: per diffinitionē vnitate distabūt. quare eorum alter erit par et alter impar. cōiuncti igit d e per scdam huius constituent imparē. at a b coniuncti per tertiā primi cōstituunt eandē. quare si alter fuerit par per nonam huius reliquus erit impar. et si alter fuerit impar per octauā huius reliquus erit par: quod est propositū.

a	5
c	4
d	2
f	3
e	2
	1
b	

¶Inter quēlibet imparē et vnitatem vnus est medius: idēq; est maior ipsius portio. q si inter vnitatē ⁊ ipm vnus medius extiterit: quēlibet talē numerum imparē esse cōuenict 23

¶Sit a quilibet impar et b vnitas: dico inter a ⁊ b esse vnum mediū qui est maior portio a. dico etiā q si inter a ⁊ b vnus sit medius numerū a esse imparē. Primū patet. nā cum a numerus ipar superet b vnitatē in numero pari vt in c q est differētia a ad b. et qz c est par diuidat in duo equa d atq; e. capio ergo numerū f cuius e sit differētia ad b: quē dico esse mediū inter a ⁊ b. nā q a per conceptionē differentia a ad b cōstituta est ex differētiis a ad f et f ad b: ⁊ differētia a ad b sit c. erit ergo c cōstitutus ex e differētia f ad b eius dimidio et d altero eius dimidio: quare d equalis e differētia est a ad f. est igit

f medius inter a ⁊ b. et cū a addat vnitatē super c differentiā eius ab vnitate b: ⁊ e f similiter vnitatē super c: erit a constitutus ex portionibus e f. at f qui est medius numerus maior est portio ⁊ e minor. cōstat itaq; inter imparē ⁊ vnitatē esse vnū mediū: eundēq; esse īparis maiorē portionē qd est primū. Scdm siliter. nā si inter a ⁊ vnitatem b sit f medius: per diffinitiōem a ad f et b ad f equales sunt dñe sed cū per pceptiōem differētia a ad b pposita sit ex differētijs a ad f et b ad f. illa cū in duo equa diuidi possit: erit par. at illam numerus a vnitate supat. a igitur per diffinitionem est impar. qd est scdm et totum propositum.

24 ℂInter parem ⁊ vnitatem vel nullus erit medius: vel duo minorq; paris dimidium. q si inter ipm ⁊ vnitatem duo fuerint medij: eum esse parem necesse est.

ℂSit a quilibet par / ⁊ b vnitas: si a sit par pxime sequēs vnitatem cū sola vnitate distent: inter a et vnitatem nullus erit medius. q si ăplius vnitate distent: dico pmo inf a ⁊ b duos eē medios / minorēq; esse paris dimidiū. Scdo q si iter a quēcunq; nūerum ⁊ b vnitatem duo medij pstiterint: a eē parem. Primum ostēditur. nam a paris: ab vnitate b differētia est impar. q ideo p parem ⁊ imparem vnitate distātes per nonam huius partiri potest. partiatur itaq; illa dña in duas tales portiones. tūc capio c numerum: cuius quidē minor portio sit differētia ad b. per pceptiōem maior portio erit differētia a ad c. at maior portio minorē vnitate supat. capio ergo numerum ptinue sequentem c q sit d. differētia eni a ad d: minor erit vnitate differētia a ad c. quare differētia a ad d et c ad b sūt equales. sunt igitur c ⁊ d medij inter a et b. et quia per scdam primi c est medietas d ⁊ dñe c ad b simul iūctor: et d ⁊ dña c ad b equātur a: cū d ⁊ dña c ad b addant vnitatem a ad c et c ad b. est igitur c: minor mediorum medietas paris a. et hoc est primum. Scdm declaratur. nam si inter a ⁊ vnitatem b: sint duo medij vt c d: quorū c sit minor / et d maior: dña c ad b minor est vnitate dña ipius c ad a. earū igit vna est par / et alta impar. addite igitur simul per scdam huius pstituūt numerum imparem: qui per pceptionem est differentia a ad b: cui siqdē addideris vnitatem: pstitues a. est igitur a par. quod est scdm.

25 ℂSi impares oēs ab vnitate disponantur ⁊ totidem post quēlibet sumātur: quotus ipse ab vnitate fuerit: extremū ab illo numerari puenict. et item totus ab illo quotus ipse a primo idē a pmo nūerabitur: sicq; deinceps. oēsq; in medio relicti erunt primi.

ℂSint a / b / c / d / e / f / g / h / k / l / m / n / o / p / q / r / s impares ab vnitate psequēter dispositi: et quotquot vl terius voles. dico primo q si accepto a q ternari⁹ est primo ab vnitate impare: quotus ipe e ab vnitate totum imparem post ipm accipias vt d: id est tertium: a ipm numerare. et si totum iterū post d accipias vt g: iterū a ipm numerare. et si totum post g vt l: iterū a ipm numerare. ⁊ ita psequenter. Scdo: medios oēs vt b c / e f / h k: et ita cōsequēter ad a esse primos. Primum pz. nam qa ternarius primus est ab vnitate: tres post accepti impares et ipse: sunt quattuor. quare inter a ternarium ⁊ d tertium post ipsum sunt b et c duo impares medij: et tres differētie equales. imparium eni ptinue ordinatorū ad impares: differētia est binarius: dñe scz totidem quot sunt vnitates in illo. sed tota dña d ad a per pceptionem bis repetitam: pponit ex illis tribus differētijs. igitur a in vnam illarū ductus: pducit totam. at ipse toti differētie additus: pstituit d. igitur a numerat d. et siliter ostēdit a numerare g. sunt enim quinq; inf medij impares ⁊ sex binarij dñe equales: duple qdē tribus primis. et dña g ad a ē pposita ex illis sex. ergo a per vicesimamtertiam primi illā numerabit. at a toti dñe g ad se additus pstituit g: a igit numerat g. et siliter nūerabit l. qa dña l ad a erit tripla dñe d ad a. psiliterq; nūerabit o. qa differētia quadrupla. et hūc in modum psequēter. Scdm pz. nam pmo a non nūerabit b: qñquidē detracto a de b. per duodecimam primi a nūeraret binarium differētiam residuā maior scz minorem. qd est impossibile. neq; p idem nūerabit c. nam ipo substracto d c nūeraret differentiam c ad a. que cū sit binarius bis sumptus: si substrahatur ab illa dña numerabit residuū dñam scilz dñe q erit vnitas: maior scilz minorem: et numerus vnitatem. qd est impossibile. Ita quoq; pbabis e ⁊ f ⁊ reliquos intermedios eē primos ad a. nam si a nūeraret e: substraho e ab g. et qa a numerat g vt ostēsum ē / ⁊ e per hypothesim numerum substractum: ergo per duodecimam primi numerat dñam e ad g: que ē pstituta ex duobus binarijs. qd nuper mōstratum est impossibile. Siliter si numeraret f substraho f ab numero g: et residuus erit binarius vt notum est: ⁊ a numerat g ⁊ detractum f: ergo nūerat residuum qui est binarius maior minorem. qd est impossibile. Et ita pba b nūerare g / n / s: sed intermedios oēs esse ad b pmos. et c nūerare l et s ⁊ inf medios ad ipm esse primos. habebisq; psimili vbiq; argumentatiōe ppositum. atq; ita habet impares relictos q post aliquē totorū toti non veniunt: oēs p tridecimā hui⁹ esse pmos.

26 ℂSi ab vnitate impares coaccruētur: qui pucnict erit quadratus.

ℂSit vnitas: ⁊ suo ordine psequētes impares a / b / c / d / e / f. dico vnitatem ⁊ a pstituere quadratum. Item vnitatem a ⁊ b pstituere quadratum: et vnitatem a b et c. et ita psequēter quotquot sit aggregaueris. diuido eni a primum imparem in duas portiones vnitate distātes: et certū est maiorem distare vnitate ab vnitate ⁊ miorem vnitati eē equalem: quas vno ordine situo iuxta primam vnitatem certū est duos esse ordines ab vnitate sumptos vsq; ad duos vnitate distātes (vnitatem eni hic nomie nūeri censemus) ergo per tricesimamtertiam sexti vnitas ⁊ due ille portiōes aggregate pstituūt quadratū. at due ille portiones equātur impari vnitatem sequēti. vnitas igitur ⁊ a impar sequens simul iuncta: pstituūt quadratum. Item resoluto a in vnitatem ⁊ binarium: cum binarius sit dña b ad a: b resoluet per nonam huius in duas portiones: quarū vna erit binarius / ⁊ alta binario vnitate maior: id est equa a. q cū prima vnitate statuātur vno ordine iuxta portiōes a. tūc erūt duo ordines ab vnitate ad nūeros vsq; vnitate distātes dispositi: ergo per eādem tertiam ⁊ tricesimam sexti illi simul aggregati pstituūt

a 6 d 4 c 3 b 1 — a 2 b 1

s 35 r 33 q 31 p 29 o 27 n 25 m 23 l 21 k 19 h 17 g 15 f 13 e 11 d 9 c 7 b 5 a 3

f 13 49 — e 11 36 — d 9 25 — c 7 16 — b 5 9 — a 3 4 — 1

quadratum.at vnitas cū portiōibus b ꝛ portionibus a equatur vnitati a et b simul:igitur vnitas a ꝛ b sil' aggregata ꝯstituūt quadratū. Silit' si diuidas c in duas portiōes vnitate distātes:cū c supet b solo binario maior ei' portio sola vnitate maior erit maiore portione b/ ꝛ minor eq̄lis maiori. statuā ergo eas iuxta portiones b.et tūc erūt duo ordīes ab vnitate vsq̄ ad nūeros vnitate distātes dispositi. ergo illi sil' aggregati per eādem tricesimātertiam sexti efficient quadratum.at vnitas et ille portiones sil' equāturvnitati a/ b/ ꝛ c.igitur illa simul aggregata silit' ꝯstituūt quadratum.ꝛ ita de quolibet alio argumētabere:ordinādo portiones vnitate distātes vt inceptum est p duos ordines. Nā quia sequēs impar ab inferiore sp binario distat:ideo eius mior portio maiori inferioris equabit':ꝛ maior sequētis eādem inferioris maiorem vnitate supgredie'.sicq̄ clarum habebis ꝓpositū. Et ex hac cognoscit' q̄d in tertio auditiōis phisice ex Pithagora adducit aristoteles suis quadratis ꝯsequēter adiūctos impares nunq̄ mutare spēm:sed sp q̄dratos relinq̄re.hincq̄ impares quadratoꝝ gnomonas appellari.

Si pares ab vnitate sibi coaceruētur:coaceruatus ab oībus erit altera pte lōgior. 27

f——12 6——n
e——10 5——m
d——8 4——l
c——6 3——k
b——4 2——h
a——2 1——g
1 2 3 4 5 6

Dispono pares ab vnitate a/b/c/d/e/f:ꝛ quotquot voluero:dicoq̄ a ꝛ b simul:eē altera pte lōgiorē et a/b/et c.silit' a/b/c/ ꝛ d.et ita ꝯsequēter.nam ipsos p equalia diuido:quoꝝ vnas medietates hinc et alias illinc ordino.et quia p decimāoctauam huius illi erant dupli numeroꝝ ab vnitate seriatim ꝓcedentiū:ordines illi ab vnitate s'm naturalem numeroꝝ seriem ꝓcedunt:ergo per tricesimāquartam sexti:duo prima media ꝛ duo secūda simul coaceruata ꝯstituūt altera parte longiorem. at illa equant' a ꝛ b simul ꝛ p eādem tricesimāquartam duo tertia media cū mediis prius positis cōstituūt altera pte longiorem:et illa equātur a b et c:et ita ꝯsequēter.sicq̄ constat propositum.

Si dispositis imparibus ab vnitate duo primi post vnitatem ꝯiūgant':ac post illos tres: post quos d'o quattuor sicq̄ deinceps scd'm naturale numerorum augmentum: qui ꝓducētur erunt cubi.latusq̄ cuiuslibet ꝯiunctoꝝ imparium numerus. 28

29 125
25 27 5
h—— d 25
23
21

19 64
16 17 4
g—— c 15
13

9 11 27
f—— b 9 3
7

4 5 8
e—— a 3 2

1

h 19 p 5 q 4
l 17 r 2 s 1
g 16 b 3
m 15 a 2 a 2
n 13 1 1
t 11

Disponātur ab vnitate impares:p'mo vnitas p se que est cubus ꝛ cubi ei': latus.deinde primi duo impares vt a.post quos tres sequētes p se vt b.post quos quattuor vt c.dehinc quinq̄.postea sex.et ita ꝯsequēter s'm naturale augmentū numeroꝝ dico duos p'mos aggregatos facere cubum:cuius latus est numerus imparium:id est binarius. Silit' tres alios ꝯgregatos cōstituere cubum:cui' latus est nūerus illoꝝ impariū ꝯiūctoꝝ.i.ternari'.et ita deinceps.capio primo aliquē nūerum s'm quē sumūtur impares ad cubum ꝯstituendū:sitq̄ p'mo par vt c:cuius quadratus sit g.qr eni c per ꝯceptiōem totus est ab vnitate quota ps eius est vnitas:erit vt ipse et vnitas et oīs infra eum numeri vt a et b tot sint numeri quot in ipso sunt vnitates.et cū numeri s'm naturale nūeroꝝ augmentum sint capti:ip̄e totus erit parium quot sub ipso sūt impares vnitatem enī imparem voco:tot igitur impares sub eo sunt q̄t in eius dimidio sunt vnitates.dispenātur ergo duo ordines ab vnitate:quoꝝ vnus terminetur in c/ ꝛ alter in b:sitq̄ b minor c vnitate.quia enim per tricesimamtertiam sexti illi simul aggregati ꝯstituūt quadratum:cuius latus est c.qui q̄dē quadratus positus est eē g ꝛ c ē par: quare p decimā huius/ ꝛ g eius q̄dratus est par.Et hinc q̄q̄ euenit vt medietas c cū b ꝛ inferioribus b sit tanq̄ medietas q̄drati g.ideo quot vnitates in b et inferioribus eius et dimidio tot erūt impares vsq̄ g:q' numeris p ordinē dispositis q̄libet par tot impares sub se hēat:quot in eius medietate ꝯtinet vnitates. Sumo item tot impares vltra g:quot sunt vnitates in reliqua medietate c:sitq̄ vltim' h.erit ergo h totus imparium ab vnitate quot vnitates sunt in c ꝛ in inferioribus eius:sed prius sumptorum imparium vltim vt k totum ab vnitate eē manifestum est.erit igitur k idem cū h.et q̄m imparium s'm se sumptoꝝ medietas est supra g sumpta:reliqua medietas erit infra g locata.et q̄a g per scd'am primi duoꝝ circūstantium ꝓximorū est medietas:vt in figuratiōe l et m.et per eādē duoꝝ alioꝝ:vt h et n medietas.et ita quotq̄t fuerint.ergo adiuuante vndecima primi eueniet vt numerus ex illis imparibus aggregatus sit tanq̄ numerus ex c imparium nūero in g ꝓductus.erit igitur ꝓductus ex illis imparibus cubus atq̄ nūerus imparium latus eius.q̄d est ꝓpositū quo ad hoc.Sit scd'o b numerus impar aliquoꝝ imparium s'm quem ꝯstituēdus est cubus:cuius quadratus sit f.quia enī b est impar:igitur p vndecimam huius ꝛ f est impar.diuido enī f in duas portiones inequales ꝛ vnitate distātes p decimānonā huius quaꝝ maior sit p/et minor q.quia enī f numerus impar supfluit s'm numerorum seriem absq̄ pari hinc fiet vt quoties vnitas in p totus imparium sit f ab vnitate:et quoties vnitas in q tot sint pares sub ipso. cōstituo itaq̄ duos ordines:primum ab vnitate vsq̄ b/ et scd'm ab vnitate vsq̄ a.sitq̄ b maior vnitate a. et intelligo b diuisum in duas partes vnitate distātes:qr est impar.quaꝝ maior sit r/ et minor sit s.per tricesimātertiam sexti:illi aggregati ꝯstituūt quadratū:cuius latus est b.ille aūt quadratus positus est f.quare adiuuāte eadem a cū suis inferioribus ꝛ r maiore portione b:tot cōtinent vnitates:quot ꝛ continētur in p.sunt igitur tot impares supra f:quot vnitates in s.sit ergo vltimus t.quia enī f totus erat imparium ab vnitate quot sunt vnitates in a in inferioribus ꝛ in r.ergo t totus est imparium ab vnitate:quot sunt vnitates in b ꝛ in oībus suis inferioribus.sed ꝛ sumptoꝝ imparium vltimus totus erat ab vnitate.q̄re t est illoꝝ vltimus.numeri igit' b:assignatoꝝ imparium tot sunt supra f quot infra eritq̄ f illoꝝ medius.oēs igitur per idem q̄d prius cū f ꝯnumerati:erunt tm̄/q̄tum ip̄e per numerum oīm:id est b multiplicatus.et q̄m b in se ꝓducit ip̄m f/ manifestum est b in ip̄m ꝓducere cubum:cuius latus est ipse b numerus assignatoꝝ imparium.sicq̄ totum constat propositum.

Numeri ab vnitate dupli:sunt pariter pares tantum. 29

Ordinētur ab vnitate oēs ꝯsequēter dupli:dico eos oēs esse pariter pares.et nullos preter eos esse pariter pares.cum enī duplus vnitate sit binarius qui est par/ ꝛ secūdus illoꝝ numerorum ab vnitate

ꝓportiõalium: per vicesimam huius oẽs alij sunt pares. et cũ binarius scd̃s ab vnitate sit nũerus p̃mus: ergo per vicesimãsextam quarti quicũq; assignabit eo facto vltimo: nullus ipm numerabit nisi aliqs in ordine illoꝝ parium añcedẽtiũ positus. quare cũ quilibet erit par quẽ nullus impar p̃ter vnitatem nũerat: p diffinitiõem q̃libet eoꝝ erit pariter par. at ꝙ nullus p̃ter eos sit pariter par pꝫ. nam si detur alius: diuidat per mediũ: et ei9 medietas p mediũ. et ita donec occurrat q̃ nõ possit ãplius diuidi. qui si fuerit impar qm̃ p vicesimãtertiam p̃mi nũerabit extremũ: non erit nũerus datus pariter par / q̃lis ponebatur. si aũt fuerit vnitas: qꝛ eius duplum fuit binarius: ipse erit de numeris ab vnitate duplis.

g 128, f 64, e 32, d 16, c 8, b 4, a 2, 1

30 ¶ Si pariter par in pariter parem ducatur: ꝓducetur pariter par.

¶ Sint a ꝛ b duo numeri pariter pares: ducaturq; alter in alterum ꝛ ꝓueniat c. dico c esse numerum pariter parem. Nã si c non sit pariter par: numeret ergo eum quicũq; impar si possibile est qui sit d. qꝛ ergo d impar numerat c ꝓductum ex duobus a ꝛ b in se ductis: ergo per quĩtam tertij d impar cõicat cum altero a aut b. numerabit ergo cõiter quicũq; numerus: d ꝛ a aut b. qui q̃a d ponitur impar: per decimãtertiam huius erit impar. numerabit igitur impar a aut b numerum scꝫ pariter parem. qd̃ est impossibile. non igitur c numerabit ab impari: qui cũ per duodecimam huius sit par: p diffinitiõem constat ipm esse pariter parem. quod est propositum.

c 64, d b 16, a 4

31 ¶ Quicunq; numerat pariter parem: ipse quoq; est pariter par.

¶ Sit a pariter par: quẽ numerat b quicũq; numerus: dico b esse numerum pariter parem. nam si b esset nũerus impar cũ positus sit numerare a: non eẽt a nũerus pariter par. quod ẽ ꝯtra hypothesim. erit igitur b numerus par: qui si non fuerit pariter par numerabit eum aliquis impar. quare ꝛ idem impar p vicesimãtertiam primi numerabit a numerum pariter parem. qd̃ est impossibile. manifestum est ergo nullum imparem numerare b. quare per diffinitionem est pariter par.

128, a, b

32 ¶ Si sumãtur quotlibet nũeri pariter pares ab vnitate ꝑcedentes: oẽs ꝛ vnitas cum eis coacceruata numerum ꝓximo pariter pare: vnitate minorem efficient.

¶ Sit vnitas: ꝛ a / b / c / d / e ordine ꝑcedẽtes pariter pares: dico ꝙ vnitas a b c d sit aggregata ꝯstituũt numerum vnitate miorem e. nam p vicesimãnonam huius quilibet sequẽtiũ est duplus p̃cedẽtis: q̃re sequens est tanꝙ̃ precedens duplicatus. At a secũdus ab vnitate supat eã vno: quare vnitas ꝛ a minus sunt vno ꝙ̃ ipse a duplicatus. ergo min9 vno ꝙ̃ b. quare vnitas a ꝛ b minus vno ꝙ̃ b duplicatus: ergo ꝙ̃ c. q̃re vnitas a b et c minus vno ꝙ̃ d. q̃re iteꝝ vnitas a / b / c / et d simul minus vno ꝙ̃ e. qd̃ est ꝓpositũ.

e 32, d 16, c 8, b 4, a 2, 1

33 ¶ Omnis numerus cuius medietas est impar: est pariter impar.

¶ Sit numerus par a: cuius medietas sit c numerus impar ꝛ b binarius: dico a eẽ numerum pariter imparem. nam q̃a c est medietas a: ergo b binarius numerabit a scd̃m se. dico rursum ꝙ quicũq; alius par numerabit a scd̃m imparem ipm numerare. et esto vt e alius par ipm numeret scd̃m d: dico d esse imparem. nam q̃a qd̃ fit ex d in e est a / et qd̃ ex b in c similr̃ est a: ergo p vicesimãquĩtam secũdi q̃ ꝓportio d ad b ea est c ad e. ergo pmutatim que d ad c: ea est b ad e. at cũ oĩs numerus par alius a binario fiat cõtinue addẽdo binarium p̃mo ad binarium ꝛ deinde ad suũ precedentem: binarius ergo oẽm parem numerat. b ğ numerabit e: quare ꝛ d numerabit imparem c. est ergo d per decimãtertiam hui9 impar. quicũq; ergo par numerat a scd̃m imparem eum numerat: quare p diffinitiõem a est pariter impar. quod est propositum.

a 18, d 3, b 2, c 9, e 6

34 ¶ Si impar in numerum pariter imparem ducatur: qui ꝓueniet erit pariter impar.

¶ Sit a numerus impar: b vero pariter impar: et c numerus ꝓductus ex a in b. dico c eẽ numerum pariter imparem: sit eñi d medietas c cũ c per duodecimam huius sit par / ꝛ e binarius. q̃a e in d facit c ꝛ similr̃ a in b facit eũdem c: ergo p vicesimãquintam secũdi que ꝓportio e ad a: ea est b ad d. quare permutatim que ꝓportio e ad b ea est a ad d. sed c binarius impariter est in b: cũ b sit pariter impar. ergo et a impar est impariter in d. nũeratq; a nũerum d scd̃m imparẽ. ergo p vndecimam hui9 d est impar et c per precedentem: cũ eius medietas d sit impar: erit pariter impar. quod est propositum.

c 54, d 27, b 18, a 3, e 2

35 ¶ Numeris paribus ab vnitate dispositis tertius a p̃mo: atq; ab illo tertius: vno q̃q; intermisso oẽs a prius sumptis tertij: sunt pariter impares tm̃.

¶ Continuẽtur pares ab vnitate: sintq; a / b / c / d / e / f / g / h / k / l / m: et sic ꝯsequẽter. dico tertiũ c: ꝛ e ttiũ ab illo: et g rursus ab hoc tertium ꝛ ita deinceps vno sp intermisso eẽ pariter impares. Nã p decimã octauam huius illoꝝ parium medietas sunt numeri ab vnitate naturali ordine dispositi: quoꝝ vnus est par / ꝛ alius impar alternatim positi. primi ergo parium. i. binarij qm̃ medietas eius ẽ vnitas que potẽtia ẽ impar: erit ꝛ potẽtia pariter impar. secũdus vero ab eo nõ erit pariter ĩpar: qꝛ eius medietas est par. At c tertius ꝛ quĩt9 ꝛ septimus ꝛ nonus erũt pariter impares per penultimam huius cũ coꝝ medietates sint impares. qd̃ est ꝓpositum quo ad hoc. Neq; alij pares quicũq; erũt pariter impares: qꝛ eoꝝ medietates sunt pares sicq; par vt binarius eos scd̃m parem numerabit: quare p diffinitiõem non erunt pariter impares. quod est totum propositum.

m 11 22, l 10 20, k 9 18, h 8 16, g 7 14, f 6 12, e 5 10, d 4 8, c 3 6, b 2 4, a 1 2

36 ¶ Numerorum pariter imparium continue sumptorum: equales sunt differentie.

¶ Hoc eñi ideo est ꝙ si oẽs pares ꝯtinue sumant: erit oĩm illoꝝ eadem dr̃ia. nã binarius. Sũptis igr̃ f̃m exigẽtiam precedẽtis paribus ꝛ ꝯtinue pariter impares vno intermisso: erunt per ꝯceptiõem eoꝝ differẽtie ex differẽtijs ipsoꝝ ad medios composite: quaꝝ cũ media sint equalia / ꝛ tote per ꝯceptiõem erunt equales. quod est propositum.

12
a———
6
b———

¶ Numerus a duobus non duplus cuius medietas est par: est impariter par. 37

¶ Sit a quilibet nũerus par: cui⁹ medietas b sit par: et non sit a de nũero duplorũ ab vnitate sumptorum. dico a esse numerum impariter parem. Nam cũ eius medietas b sit par: non est pariter impar. et cum nõ sit de numero duplorum ab vnitate sumptorum: ergo per vicesimãnonam huius non est pariter par. a sufficienti igitur diuisiõe est impariter par. qđ est propositum. Sed et ostẽsiue sic. cũ medietas a sit par/ et binarius nũerus par scđm eam ipm numeret: per diffinitiõem a: non est nũerus pariter impar. sed et cum non sit de numero duplorũ ab vnitate sumptorum si ipse in duo media diuidatur: et media iterum in media. in hac cõtinua diuisiõe necesse ẽ aliud ab vnitate occurrere: qđ diuisionem in duo media sistat. quare numerus ille erit impar. et quia ille est pars partis: ergo per vicesimãtertiam primi est et pars totius. quare per decimãquintam huius ille impar totũ scđm parem numerabit. at cũ par ipm scđm parem numeret: ergo per diffinitionem a totus: est impariter par. quod iterum est propositum.

c———96
b———12
a———8

¶ Ex ductu pariter paris in impariter parem: puenit impariter par. 38

¶ Sit a numerus pariter par: ducaturque in b impariter parem et pueniat c. dico c esse nũerũ impariter parem. Nam per hypothesim a numerus par numerat c scđm b qui est par. et quia impar numerat b cum sit impariter par: idẽ impar per vicesimãtertiam primi numerabit c. et non nisi scđm parem: alioquin per vndecimam huius c eẽt impar. cõstat ergo per diffinitionem: c esse impariter parem. et propositum.

¶ Omnis impariter par fit ex pariter pare in pariter imparem. Quo fit vt oẽm impariter parem: numeret pariter par impariter. 39

a———12
b———6

¶ Sit a quilibet nũerus impariter par: dico ipsum fieri ex pariter pare in pariter imparem. nã medietas a ẽ par. alioquin a esset pariter impar. esto itaque b medietas a: si medietas b sit impar: ergo b per tricesimã tertiam huius est pariter impar. et cũ binarius numeret a scđm b cõstat pariter parem numerare a scđm pariter imparem. at si b medietas impariter paris a/ sit par: sit ea d cuius quidẽ medietas sit impar. Ideo d per tricesimãtertiam huius erit pariter impar. et per vicesimãtertiam primi numerabit a. sitque hoc scđm e: et sit c binarius. quia b nũerat a scđm c: et d nũerat eũdẽ scđm e: ergo per vicesimãquintam scđi que proportio b ad d ea est e ad c. sed b est duplum d: igitur et e duplũ c. quare per decimãoctauam huius e est pariter par: et numerat a scđm d pariter imparem. cõstat ergo iterum propositũ. et si tertius nũerus primum diuisione facta occurreret pariter impar: accepto penultimo parium loco b/ et eius dimidio loco d et e loco c: per eãdem vicesimãquintam secũdi cõcludes propositum. et vniuersaliter quoties hec subdiuisio fiet: toties fiat ab vnitate pariter pariũ duplatio. et sumpto penultimo parium cũ suo dimidio per tricesimãtertiam huius et vicesimãquintam scđi cõsimiliter cõcludes propositum. Correlariũ patet accepta medietate pariter imparis et duplo pariter paris: quicquid ẽ pariter par cũ pariter impare nũerabat impariter parem adiuuante sp vicesimaquinta secundi.

a———24
b———12
d———6
e———4
c———2
a———48
b———12
d———6
e———8
———4

¶ Si disponãtur in longum pariter pares: et in latum pariter impares: qui scđm angulares cõuentus producũtur: sunt impariter pares tm̃. et ipsorum in longitudine quidem est similitudo proportionum: in latitudine vero differẽtiarum equalitas. 40

Latitudo — ¶ Pariter impares (m, l, k, h, g)

Longitudo — ¶ Continue proportionales.

m	26	52	104	208	416	832	1664
l	22	44	88	176	352	704	1408
k	18	36	72	144	288	576	1152
h	14	28	56	112	224	448	896
g	10	20	40	80	160	320	640
	6	12	24	48	96	192	284
		2	4	8	16	32	64
		b	c	d	e	f	

¶ Pariter pares.

Longitudo

¶ Horũ equales sunt differentie

¶ Disponãtur b/c/d/e/f pariter pares scđm longum: et g h k l m: pariter impares scđm latum. Dico primo qui producũtur ex b in g/h k l m et ex c in eisdem: et similiter ex d/e et f in eisdẽ: esse impariter pares et solos tales. nam oẽs illi fiunt ex ductu pariter paris in pariter imparem. ergo per tricesimãoctauam huius quilibet eorum est impariter par. et si alius esset impariter par preter eos qui ex illis pariter paribus scđm suã seriẽ ordiatis et pariter imparib⁹ producũtur: ille nõ fieret ex pariter pare in pariter imparem. qđ per precedentem est impossibile. ratum est ergo qđ dicitur. ¶ Secũdo dico oẽs in lõgitudine vt oẽs in linea g et oẽs in linea h: et ita de reliquis/ eẽ cõtinue proportiõales. nam quia b binarius primus pariter parium ducitur in g: manifestũ est scđm in linea g: qui inde producitur esse duplum ad g: et in proportiõe c ad b. sed et quia b in g facit scđm ab ipso g et c in g facit tertium: ergo per octauam secũdi que proportio c ad b ea ẽ tertiũ ad scđm. et ita cõsimiliter ostẽde de reliquis per octauam secũdi adiuuãte vicesima nona huius que b/c/d e f continue proportionales eẽ demõstrat. Et ex hoc demõstrare promptum est per vicesimãsextam secũdi qđ fit ex ductu vnius medio in se: tm̃ esse quantum qđ fit ex ductu circũpositorum vni⁹ in alterũ. et per vicesimãquitam eiusdẽ quod fit ex ductu vnius mediorum in alium: tm̃ esse quantum quod fit ex ductu circũpositorum et equaliter ab eis distãtium vnius in alterum. ¶ Tertio dico oẽs numeros scđm latitudinem in vnaquaque linearum ab g incipiẽtes et ad m in latum euadentes: equales hr̃e differẽtias. quod enim in prima linea que est pariter imparium drẽ cõtinue sint equales: statim per tricesimãsextam huius est cognitũ. Sed quod secũde linee numerorum eq̃les sint differẽtie/ declaratur. nam per nonam primi tm̃ est qđ fit ex b in g et in differentiam h ad g quantũ quod fit ex b in h. addit igitur qđ fit ex b in h secundus scilicet impariter parium secũde linee sup eo quod fit ex b in g

pmo scz impariter parium eiusdem linee:tm̄ q̄ntum est quod fit ex b in differētiam g ad h.et quia iter per eandem nonam pⁱmi tm̄ est quod fit ex b in h ⁊ in differentiam k ad h:q̄ntum qđ fit ex b in k.addit igitur qđ fit ex b in k sup eo qđ fit ex b in h scz tertius impariter parium sup secūdum:q̄ntum est qđ fit ex b in differētiam k ad h.sed differētia k ad h tanta esse pbata est:q̄nta differētia h ad g.est igit̄ eq̄lis dr̄ia illoꝝ impariter parium.⁊ ita ɔsequēter p nonam de reliquis expedies.Et ex hoc facile demōstrabile est p scđam pⁱmi q̄ q̄libet illoꝝ duplatus tm̄ est:q̄ntum duo circūpositi ɔiūcti.et p tertiaz eiusdem pⁱmiq̄ duo medij ɔiūcti tm̄ sunt:q̄ntum circūpositi/et equali infuallo ab eis distātes pariter accepti.

41 ¶ Quęcunq̄ numerat impariter par:idem etiam est impariter par.

¶ Sit a quicūq̄ nūerus impariter par:qui numeret b.dico b esse impariter parem.Nam quia a par numerat b:ergo per duodecimam huius b erit par.quod fit vt quoties a numerat b: toties medietas a numeret medietatem b.sed medietas a cū sit impariter par est par.igitur p duodecimā huius ⁊ medietas b est par.sed ⁊ aliq̄s impar numerat a numerum impariter parem:igitur idem numerabit b p vicesimātertiam pⁱmi.est igitur b per diffinitiōem numerus impariter par.quod est propositum.

48 b · 12 a

42 ¶ Si pariter impari impariter par:siue pariter par sup binarium ɔiūgatur: ɔpositus erit pariter impar.

¶ Sit a quicūq̄ pariter impar:cui adiūgat̄ b quicūq̄ imparit̄ par aut pariter par sup binariū: sitq̄ c compositus.dico c esse pariter imparem.nam q̄ a est pariter impar:ei⁹ medietas est impar.et quia b est impariter par:per tricesimāseptimam huius:eius medietas est par.medietas igit̄ b ⁊ medietas a simul p scđam huius ɔstituūt numerum imparem.at numerus ex medietate a ⁊ medietate b ɔstitutus:est medietas compositi c.igit̄ per tricesimāsextam huius c est pariter impar.⁊ ita argumētabere si pariter impari additur numerus pariter par sup binarium.quod est propositum.

c · a · b

43 ¶ Si pariter impares nūero pares ɔiūgant̄:ɔposit⁹ erit pariter par vl' imparit̄ par.

¶ Nam quia cuiuslibet illoꝝ medietas est impar:per quartam huius compositi medietas erit par. non est igitur compositus per tricesimātertiam huius:pariter impar.quare a sufficiēti diuisione erit aut pariter par/ aut impariter par.quod est propositum.

e 48 · d 18 · c 14 · b 10 · a 6

44 ¶ Si pariter impares numero impares coniūgant̄:componetur pariter impar.

¶ Nam quia cuiuslibet illoꝝ pariter imparum medietas est impar/ et sunt in numero impari:igitur per quintam huius illoꝝ medietates coaceruate ɔstituūt numerum imparem. ɔpositi igit̄ medietas est impar.ergo per tricesimātertiam huius:compositus est pariter impar.quod intenditur

d 30 · c 14 · b 10 · a 6

45 ¶ Si diuersi pariter pares q̄tlibet supra binarium sibi coaceruētur:ex ipis cōstitutus erit impariter par.

¶ Sint a/b/c/d quotlibet nūeri parit̄ pares supra binarium ⁊ d maximus:sitq̄ e duplus ad d:sitq̄ f ɔpositus ex a/b/c/d.dico f eē impariter parem.nam q̄ a b c d sunt pares: p primam huius f est par. et q̄ sunt a b c d pariter pares supra binarium:eoꝝ medietates sunt numeri pares.addite ergo simul per primam huius ɔstituūt parem.et q̄ p tricesimāscđam huius a/b c d simul aggregati minus sunt q̄ e:ergo f est minoꝛ e.at e est pⁱmus pariter par post d:igitur f non est pariter par.et cum eius medietas sit par:ergo per tricesimāseptimam huius:est impariter par.quod est propositum.

f 120 · e 128 · d 64 · c 32 · b 16 · a 8

46 ¶ Pariter impares f̄m datū nūerum parem inuenire:qui ɔiūcti faciāt parit̄ parem.

¶ Sit pⁱmo a nūerus par f̄m quem iubemur parit̄ impares tales qui ɔponūtur inuenire:q̄ ⁊ idem a sit pariter par.quot ergo sunt vnitates in a:tot ɔtinuo pariter impares ab vnitate quoꝝ medietas sit b c:sitq̄ d pximus ascēdendo pariter par.et si inter c ⁊ d sit iter aliq̄s pariter impar:circa d hinc ⁊ inde sumo pariter impares f̄m dimidium a:itavt oēs sint sumpti f̄m numerum a. sintq̄ inferiores:c g/ e: supioꝛes e f.quia eni d est par/ ⁊ nō est parit̄ impar:per tricesimāquītam huius pximi pares hic ⁊ inde g ⁊ e sunt pariter impares.quare ⁊ g c equalit̄ distant a nūero d.et q̄ siliter p eādem vno pari infposito post e seq̄tur f:⁊ vno interposito post g seq̄tur c.etiā equidistabūt hic ⁊ inde c ⁊ f ab numero d.ergo p scđam pⁱmi g ⁊ e simul sunt duplum pariter paris d.quare p vicesimānonam huius g ⁊ e sit̄ sunt pariter par.et p eādem scđam pⁱmi c ⁊ f simul:sunt duplum d eiusdez pariter paris.sunt igitur pariter impares simul sumpti f̄m numerum a scz g/e/ ⁊ c f quadruplum d:⁊ duplū duplo ad d.quare per vicesimānonam huius c/g/e/f simul sunt parit̄ par siue sunt tm̄ q̄ntum qđ fit ex a pariter pare:in d pariter parem.quare p tricesimam huius:q̄ inde pducitur est pariter par.quod iter est propositum: quo ad hoc.At si a non sit pariter par:capio quēcunq̄ numerum pariter parem vt a alterū:qui vltro/ citroq̄ hēat pariter impares:vt b/c/d/e.et sumo duplum a:q̄ sit g.qui etiā per vicesimānonam huius est pariter par.sintq̄ f/h sui circūpositi pariter impares.deinde capio l duplū g: qui etiam est pariter par.⁊ k/m circūpositos pariter impares.siliter capio o duplum l ⁊ circūpositos pariter impares n/p et hoc toties eoq̄ vsq̄ fiat quousq̄ habeamus pariter impares acceptos f̄m numerum datum a:quos quia hic totidē accepi dico numerum ex b/c/d/e/f/h/k ⁊ ceteris sumptis pariter imparibus:ɔpositū esse pariter parem.et sit q pariter par acceptus duplus ad o.quia eni per scđam pⁱmi c d simul:sunt q̄ntum g duplum a.et etiam per eādem b e:q̄ntum g duplum a.igitur c/d/ ⁊ b/ e simul:q̄ntum l duplū g. sed per eandem scđam pⁱmi f h q̄ntum l duplum g.ergo b/c/d/e/f/h:q̄ntum o duplum l.sed k m:q̄ntum o duplum l p eādem scđam.igitur b/c d e f h k m:q̄ntum q duplum o.sed ⁊ per eādem scđam n p q̄ntum q duplum o.igitur b/c d e f h k m n p simul:q̄ntum duplum q.qui per vicesimānonam huius est pariter par.sicq̄ constat propositum.

a 4 · f 22 · e 18 · d 16 · g 14 · c 10 · b 6

r 504 · q 252 · p 130 · o 128 · n 126 · m 66 · l 64 · k 62 · h 34 · g 32 · f 30 · e 22 · d 18

a 10 · a 16 · c 14 · b 10

m 64
l 34
h 32
k 30
g 18
e 16
f 14
a 6
d 10
b 8
c 6

℄ Scdm datum parem: pariter impares sumere: q̄ impariter parem ꝯiuncti ꝯstituāt. 47

℄ Sit a datus numerus par fm quē iubear sumere numeros pariter impares: qui ꝯiuncti ꝯstituant numerum impariter parem. sumo b / e h / ꝯtinue numeros pariter pares post binarium fm medietatē nūeri a circa quos sint e d f g k l circūpositi pariter impares. dico c d f g k l parif impares fm nūerū a sumptos: simul iunctos ꝯstituere numerum īpariter parem. et sit m duplum h qui etiā p vicesimam nonam hui⁹ est pariter par. quia enī per secūdam pmi c d simul sunt tm̄ q̄tum e duplum b: et p eandē f g q̄tum h. et k l q̄tū m. erūt c d f g k l sil' q̄tum tres pariter pares e h m ꝯtinue sumpti post binariū. at e h m simul p quadragesimam quintā huius ꝯstituūt impariter parem: igitur et c d f g k l simul. qd̄ est propositum.

a 4
k 88, e 22
h 72, d 18
g 56, c 14
f 40, b 10

℄ Impariter pares quotlibet reperire: qui coacervati faciant pariter parem. 48

℄ Sit pmo a nūerus datus par fm quē ꝓpositū est impariter pares repire: qui coaceruati ꝯstituant pariter parem: iuenio p q̄dragesimāsextam hui⁹ totidem parif impares q̄ coaceruati ꝯstituāt nūerū pariter parem: qui sint b c d e. et duco aliquē pariter parem in quēlibet eoꝝ: ⁊ ꝓueniāt f g h k totidem qui p tricesimāoctauā huius erūt imparif pares. at p nonam pmi idē est qd̄ fit ex illo parif pare in b c d e: et in ꝯpositum ex b c d e. at cōpositum ex b c d e per hypothesim est pariter par: ergo p tricesimam huius quod fit ex pariter pare in b c d e est pariter par. illud aūt est cōpositū ex impariter paribus f g h k fm datum nūerū inuētis. est igitur effectū qd̄ ꝓponebaf quo ad hoc. ℄ Sit secūdo vt a sit impar scdm quem ꝓpositum sit reperire impariter pares qui cōstituūt pariter parem sumo per immediate mōstratū impariter pares scdm parem minorem vno a: qui aggregati ꝯstituāt pariter parem: sintq̄ b c. sitq̄ d pariter par ex b c coaceruatus. sumo f tertiū pariter parem ab ipo: e quidē medio parif pare inꝑposito. et q2 differētia f ad d cōstat ex differētia d ad e q̄ est d pariter par ⁊ differētia e ad f que est e pariter par: cum sp sequens sit pcedētis duplus. ergo p quadragesimam quītam huius dfia f ad d est impariter par. sit ergo dfia illa g. dico ergo b c g eē impariter pares qui petūtur. nam b c simul sunt d quibus additus impariter par g tm̄ facit sicut f. nam erat differētia d ad f. at xo f est nūerus pariter par. constat ergo totum propositum demōstratum.

a 3
f 128
e 64
d 32
g 96
c 20
b 12

℄ Ex dato nūero: imparif pares ex quibus ꝯiūctis impariter par efficiaf inuestigare 49

℄ Sit pmo datus nūerus par qui sit a scdm quem iubemur impariter pares inuestigare: qui ꝯiūcti ꝯstituāt impariter parem. inuenio totidem pariter impares p quadragesimāsextam hui⁹ qui cōiūcti ꝯstituāt pariter parem: sintq̄ b c d e. capio g ꝓxim pariter imparē post e. qui q2 solo quaternario distat ab e: manifestū est b c d g simul plus eē pariter pare b c d e simul ⁊ minus duplo b e d e simul. quare p vicesimānonam huius: aggregatus ex pariter imparibus b c d g nō est pariter par. et cū p pmā hui⁹ sit par: idem erit a diuisiōe aut pariter impar aut impariter par. duco ergo f nūerum quēcūq̄ parif parem in b c d g: ⁊ ꝓueniāt h k l m: totidē quot vnitates in a: qui p tricesimāoctauam huius sunt impariter pares. at aggregatum ex h k l m tm̄ est q̄tum qd̄ fit ex f in b c d g simul p nonam primi. at si b c d g simul sunt pariter impar: p tricesimāoctauam huius: aggregatus ex h k l m erit impariter par. et si b c d g sit impariter par: idem accidet p quadragesimāpmā huius: sicq̄ sp habebitur ꝓpositū. At xo si a sit numerus impar: sumo totidem pariter impares: qui aggregati p quadragesimāquartā huius erunt parif impar. quos multiplico per quēlibet pariter parem: ⁊ ꝓueniēt totidem impariter pares p tricesimāoctauam huius. et q2 ipi impariter pares simul tm̄ sunt q̄tum quod fit ex illo parif pare in aggregatum ex pariter imparibus qui mōstratus est pariter impar. ergo per tricesimānonā erit aggregatus ex impariter paribus impariter par. quod est propositum.

m 104
l 72
k 56
h 40
g 26
e 22, a 4
d 18
c 14
b 10
f 4

℄ Quotlibet impariter pares: ⁊ pariter pares sup binarium: sil' iuncti: pariter parem vel impariter parem component. 50

℄ Nam oīm medietates pares sunt. at ipe simul: ꝯpositi medietatem ꝯstituūt: ergo p primam huius compositi medietas est par. non est igitur compositus pariter impar. a diuisione ergo aut est pariter par / aut impariter par. quod intendebatur.

℄ Pariter pares ⁊ īpariter pares q̄tlibet inuestigare: q̄ ꝯiūcti parif parem cōstituāt. 51

℄ Sit a numerus datus scdm quē debemus aggregare pariter pares ⁊ impariter pares qui ꝯstituāt parif parem. capio totidē imparif pares qui p quadragesimāoctauā huius simul cōgregati cōstituāt pariter parem: sintq̄ b ⁊ c. et sit parif par quē ꝯstituūt d. capio totidem ꝯtinue parif pares supra d q̄ sint e ⁊ f: certū est e esse duplum d et f duplum e. dico ergo impariter pares b c / ⁊ totidē pariter pares d ⁊ e simul ꝯstituere pariter parem. Nam q2 b e simul ꝯstituūt d: ergo b c ⁊ d simul ꝯstituūt e duplū d sed et per idem b c d et e simul cōstituent f duplum e. at f est pariter par: igitur totidem pariter pares et totidem impariter pares quota ꝯstituūt pariter parem. quod est propositum.

f 128
e 64
d 32
c 20
b 128, a 2

℄ Scdm datū numerum pariter pares reperire: qui cū quotlibet impariter paribus numerum impariter parem constituant. 52

℄ Sit datus nūerus a: scdȝ quē iubeamur reperire pariter pares: qui cū quotlibet imparif paribus vt sumptis scdm b ꝯstituant numerum impariter parem. sumo pmo p quadragesimāoctauam huius impariter pares scdm b qui sil' ꝯstituāt pariter parem: sintq̄ c d e ⁊ ꝯstituant f pariter parem. ⁊ sumo pariter pares post f scdm a nūerum datū q̄ sint g h k l quos dico cū impariter paribus c d e ꝯstituere impariter parem. nam q2 c d e ꝯstituūt f: ergo c d e ⁊ f ꝯstituūt g duplū f. et e d e f ⁊ g nūerum h duplū g. ergo c d e ⁊ g plus ꝯstituūt q̄ duplum f: ⁊ minus q̄ duplū g. et ita argumētabere ꝯsequēter c d e et h

b 3, f 128
l 2008
a 4, e 96, k 1004
d 20, h 502
c 12, g 256

plus ↄstituere q̄ duplū g ⁊ minus duplo h.et similiť c d e g ⁊ k plus ↄstituere duplo h et minus duplo k sicq̧ deinceps.quare c/d e g h k l simul p vicesimānonam huius non ↄstituēt pariter parem.ergo p quinquagesimam huius c d e g h k l simul ↄstituūt impariter parem.quod est propositum.

53 ¶Omnis numerus primus:est diminutus.

¶Nam oīs numerus solam partem habet vnitatem:que vt certum est minus eo ↄstituit. est igiť oīs talis per diffinitionem diminutus.quod est propositum.

54 ¶Quilibet pariter par:diminutus esse ꝓbatur.

¶Nam per vicesimānonam huius oīs talis est de duplis ab vnitate sumptis:quē p vicesimāsextam quarti nullus nūerabit nisi aliqs in illo ordine sumptus.at p tricesimāscdām huius oēs in illo ordīe sit aggregati p̄cedētes min⁹ illo pficiūt.cōstat igiť p diffinitiōem illū esse diminutum.qđ est ꝓpositū.

55 ¶Ois quem numerat numerus aut abundans aut perfectus:vt abundet necesse est.

¶Sit a nūerus pfectus aut abūdans:habēs tres ptes b c d easdēq̧ scdam/tertiā/⁊ sextam:ducatq̧ a in quēcunq̧ numerum vt in c ⁊ ꝓueniat e.erūt ↄsiles tres ptes q̄ sint f g h.eedēq̧ scđa tertia sexta. quia q̄ ꝓportio b ad a ea est f ad e:ergo pmutatim b ad f vt a ad e.Itē c ad a vt g ad e:ergo pmutatim c ad g vt a ad e.Itē d ad a vt h ad e:ergo ⁊ pmutatim d ad h vt a ad e.erunt ergo tres numeri b c d ad totidem f g h in eadē ꝓportiōe vt que est a ad e.ergo p vicesimam secūdi b c d simul ad f g h simul sūt in eadem ꝓportiōe q̄ a ad e.tunc sic.b c d simul ad f g h simul vt a ad e:ergo pmutatim b c d simul ad a vt f g h simul ad e.ergo si b c d simul abūdat sup a:et f g h siť abūdabit sup e.et si b c d ↄiūcte pficiunt a:itidem ⁊ f g h ↄiūcte pficiēt e.at si f g h ↄiūcte pficiūt c:cum e p ↄceptiōem habeat aliam partem ab ipso denoīatam que est vnitas:ea sicq̄dē predictis adiuncta facit totum abūdare sup e.erit igiť quicūq̧ talis quem numerat aut abundans aut pfectus:abundans.quod est propositum.

56 ¶Quicunq̧ perfectum numerat:est diminutus.

¶Nam si is qui numerat pfectū diminutus non sit:a diuisione erit aut pfectus aut abūdans:qui si est pfectus aut abūdans p precedentem ille quēcunq̧ nūerat est abūdans at ponitur pfectus.non est igitur perfectus aut abūdans.relinquiť igiť quēadmodum ꝓponitur eē diminutus.qđ est ꝓpositū.

57 ¶Numerum imparem abundantem inuenire:cuius sumptaꝝ partiū maxīa:a posito impare denominetur.

¶Hec videtur supponere aliquem imparem eē abundātem:qđ ⁊ verum est. Sit ergo a impar posit⁹ qui maxīam partium sumptaꝝ imparis abundātis denoīare debet et b quicunq̧ imparium abūdans qui si sit minor a:duco ipm in aliquē imparem donec eueniat impar maior a qui p quinquagesimam quītam hui⁹ erit abūdās.si aūt sit maior a:non quero aliū.et ita sit in ꝓposito.deīde sumo impares denoīantes quotquot volo supra a:ita vt a sit denoīatiuū minus.alioquin ṽitatem ꝓpositio hr̄e nō posset:sintq̧ c d e et duco a in c ⁊ ꝓueniet impar p vndecimam huius ⁊ d in ꝓductum:⁊ e in vltimum ꝓductum:et ille vltimus ꝓductus p vicesimātertiam primi hēbit ptes denoīatas ab a c d e.deīn duco in ipm totum:b.sitq̧ ꝓductus f qui p vndecimam huius erit impar:scd et p quinquagesimāquintam huius erit abūdans.qa b est abundans ⁊ habet ptes denoīatas p vicesimātertiam pmi ab a c d e ⁊ b. et qa ptiū assumptaꝝ ps denoīata ab a habet minorem denoīationem:qꝛ positus est a oīm denoīans minimus per ↄceptiōem ps denoīata ab a est oīm sumptaꝝ scꝫ scđm a c d e:⁊ b maxīa.qđ est ꝓpositū.

Surgit ex multiplicatione.
5
7
9
11
13

58 ¶Si aliqs in nūerū primum ductus pfectū numerum ꝓduxerit idem in eo minorem et se non numerantem ductus:ꝓducet numerum abundantem.

¶Sit b numerus p̄mus:⁊ a ductus in b ꝓducat c q̄ sit nūerus pfectus:sitq̧ d minor b nec numeret a et ducatur iteꝝ a in d ⁊ ꝓueniat e.dico e esse numerum abundātem.nullus eni in alium ductus nūerabit c:quoꝝ alter non numeret a.vt si f in g ꝓducat c:intelligo f primum/a scđm/b tertium/⁊ g quartū per vicesimāquintam secūdi f ad a vt b ad g.sed ⁊ per quartā tertiū b numerat alteꝝ.at cum b maior sit a/et g maior f vt supponiť:b nūerabit g.q̄re ⁊ f nūerabit a.ↄstat ḡ q̄ nullus in aliū ductus nūerabit c quoꝝ alter non numeret a.et ideo si a eēt primus non haberet c nisi a ⁊ b ⁊ vnitatem ptes suas:et a ⁊ b vnitate distarent.at nulli sunt primi vnitate distātes nisi binarius ⁊ ťnarius:cū oporteat alterū eoꝝ esse parem/⁊ alteꝝ imparem:et oīs alius par a binario/sit compositus.quicūq̧ igiť sumeretur sub b aut eēt a aut ipm nūeraret.alioquin dicātur non distare vnitate sola vt f et p:qui in se faciant pfectū. non habebit ptes ḡ nisi e f ⁊ vnitatem.at ꝓductus ex illis toties habet in se maiorē e quoties vnitas est in f.at vnitas ⁊ f simul minus faciūt q̄ e aliq̄ties sumptus:ergo f ⁊ e ⁊ vnitas non ↄstituūt pfectū. erit ergo a ↄpositus.sint ergo eius partes f ⁊ g:que p vicesimātertiam primi numerabunt c.numerēt ergo ipm scđm h ⁊ k.et eedem partes p idem etiā numerabunt e:sitq̧ scđm l ⁊ m.eritq̧ per septimam secundi ter repetitam c ad b h k:sicut e ad d l m.cum ergo c supet b ⁊ h in numeris a f g:supabit etiā e numeros d l:sitq̧ id in numero n.quē dico eē minus q̄ a f g.qđ sic ostenditur.qꝛ c ad b h:sicut e ad d l. ergo vt c ad e totus ad totum:et b h ad d l detractus ad detractum.ergo residuus a f g:ad n residuum vt c totus ad e totum.at c maior est e:igitur ⁊ a f g maior n.igitur a f g partes itidem e addite ad d l: plus faciunt q̄ e.est igitur e numerus abundans.quod erat demōstrandum.

59 ¶Si numerus in alium ductus perfectum vel abundantem ꝓduxerit:in quēlibet ab eo numeratum ductus abundantem producet.

¶ Sit a quicunq; numerus qui in alium ductus vt b ꝓducat c numerum ꝑfectum aut abundãtem: ⁊ b numeret d. dico q̄ a ductus in d ꝓducit nũerum abũdantem. nam quia ꝑ septimam secũdi q̄ ꝓportio b ad d ea est c ad e: sed b per hypothesim nũerat d: igitur ⁊ c numerabit e. c aũt positus est ꝑfectus aut abundans. igitur ꝑ quinquagesimãquintam huius ⁊ e abundabit. quod est propositum

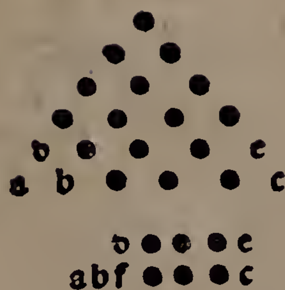
¶ Cum dispositi fuerint ab vnitate nũeri pariter pares qui ↄiũcti fecerint numerum primum: extremus in illum ductus ꝓducet numerum perfectum. 60

¶ Sit vnitas: ⁊ a b c d ↄtinue dupli: qui ꝑ vicesimãnonam huius erunt pariter pares: ⁊ coaceruatus ex eis et vnitate sit e qui ponaṫ esse primus et d extremus parium ducaṫ in e oĩm aggregatum ⁊ ꝓueniat f. dico f eē numerum ꝑfectum. manifestum est enĩ per vicesimãtertiam p̄mi a/b c d duplos sũptos oẽs numerare f. sitq; id scd̃m e/g h k vt sc; d numeret f scd̃m e: c scd̃m g: b scd̃m h: et a scd̃m k. quoties ergo vnitas in d toties e in f: et quoties vnitas in c toties g in f. quare ⁊ adiuuãte vicesimasecũda scd̃i ⁊ equa ꝓportiõalitate quoties a in d toties g in f: et ꝑ idem quoties b in d toties h in f. et quoties c in d toties k in f. Hinc tote ꝑtes sunt e/g h k ad f: q̄te vnitas a b c ad d. sed ꝑ tricesimãscd̃am hui⁹ vnitas et a b et c simul min⁹ sunt vnitate q̄ sit d. quecũq; vnitas est ꝑs d denoĩata per conceptiõem ab d. ergo e g h k simul minus faciũt f vna eius ꝑte denoĩata a numero d. pars aũt f denoĩata a numero d: est e. sunt igitur e g h k simul minus f in numero e. at vnitas a b c et d sunt tanq̄ e: igitur e g h k vnitas a b c d simul tm̃ sunt sicut f. si aũt f plures partes non habeat: constat ꝑ diffinitiõem ip̄m f numerum esse perfectum. sed q̄ nullam aliam habeat declaratur. nam si hoc sit possibile numeret ergo m: numerum f scd̃m n. q̄ enĩ e est p̄mus qui nũerat f: numerabit ergo per quartam tertij m aut n. quare ꝑ vicesimã quintam secũdi reliquus eoꝝ numerabit d. et cũ a secũdus ab vnitate sit numerus p̄mus: ergo ꝑ vicesimãsextam quarti quicũq; nũerat d est aliq̄s in ordine precedentium: vt c b a. at si sit c nũerat f scd̃m g/ et si b scd̃m h/ et si a scd̃m k partes sc; prepositas et vt dictum est. constat ergo nullum alium a p̄dictis nũerare f. quare p̄dicti sunt oẽs sue partes. et ipsi simul mõstrati sunt ip̄m complere atq; ꝑficere. constat ergo diffinitionem numeri perfecti ei ↄgruere: ip̄mq; existere perfectum. quod est ꝓpositum.

¶ Septimi elementorum Arithmetices Jordani finis.

Omne numerorum ex vnitatũ dispositiõe ꝑpendũtur. ¶ Est aũt dispositio prima in longum tm̃: altera in longum ⁊ latum: tertia v̄o in lõgum/ latum/ ⁊ altum. ¶ Cuius vnitatum dispositio in longum tm̃ est: linearis numerus dicitur. ¶ In latum disponũtur suꝑficiales linearibus vndiq; ↄclusi: quoꝝ vnitates directe ⁊ ad se ⁊ ad alias equales habent distantias. Qđ fit dupliciter sc; vl' vt vnitates vnitatibus directe adaptẽtur: vel eaꝝ inẽualis opponãtur: ita vt singloꝝ ordinum termini in lateribus reliquis excipiãtur. ¶ In altum v̄o dispositio solidorũ est: coaptatis insimul suꝑficialibus: ex quoꝝ lateribus directe sibi appositis solidorũ suꝑficies erecte constituũtur. ¶ Numerorum in superficie dispositorum: quidam sunt triangulares tria habentes latera: alij quadrilateri: alij pẽtagoni: alij pluriũ laterum. ¶ Quadrilateroꝝ aũt quidam latera opposita habẽt equidistãtia: quidam minime. ¶ Numerorum autem quoꝝ latera opposita sunt equidistãtia: alij oĩa latera habent equalia ⁊ tetragoni dicũtur. alij siquidẽ latera habent vnitate distantia ⁊ parte altera longiores vocãtur: aut amplius ⁊ dicũtur ãnlõgiores. ¶ Numeroꝝ in altũ ↄpositoꝝ diuersas esse bases cõtingit: quorũdã triangulas/ atq; quadrãgulas: et ita de ceteris. ¶ Horum oĩm quidam habent latera simul applicata: ⁊ dicũtur pyramides. quidam habent latera: que etsi insimul tendãt: non tñ ↄueniũt: et curte pyramides appellanṫ. quidam habent latera equidistãtia ⁊ equaliter erecta: qui supiorem ⁊ inferiorem suꝑficiem habent similes. Istoꝝ quicũq; habent basim triangulam: serratiles vocanṫ: q̄ quadrangulam ⁊ ipsi in longum/ latum/ ⁊ altum equaliter distẽduntur: cubi dicũtur. quicunq; v̄o bases habuerint pentagonas hexagonas siue plurium laterum: ⁊ latera equidistantia erecta: colũne nominentur.

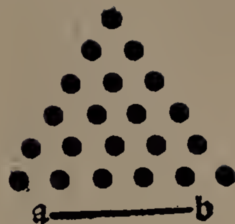
¶ Oĩs numerus triangularis: tria habet latera equalia. Vñ manifestum est quẽlibet triangularem ex numeris ab vnitate ordine cõtinuo dispositis: esse compositum: atq; latus trianguli esse seriei numerum. 1



¶ Sint a b c vnitates basis trianguli: a b ꝓxĩe: et a c extremitates. dico ergo q̄ in secũdo ordĩe cuius extremitates sunt d e: erunt pauciores vnitates. nam si totidem fuerint in ordinibus a c ⁊ d e: latera a d ⁊ c e erunt eq̄distãtia. qm̃ vnitates in vtroq; ordine equaliṫ distant: sicq; non cõcludent triangulum. pauciores ergo erunt in ordine d e. et qm̃ q̄tum distat a ab b tm̃ distat a ab d ⁊ c ab e: si ergo ponitur f tota ab c quota d ab e: distabit f ab d q̄tum c ab e. et ideo q̄tum a ab d. si ergo f non fuerit ꝓxima post a sed fuerit b vnitas media: cũ distent a ab d q̄tum a ab b: erit longitudo inter a ⁊ f q̄ta inter a ⁊ d et inter f ⁊ d vl' amplius: sicq; vnitates et ad seinuicem et ad alias non equales seruabũt distãtias. quod est impossibile. Ordo ergo d e minor est ordine a c vnitate. et eadem rõne sꝑ ordo sequens minor vno

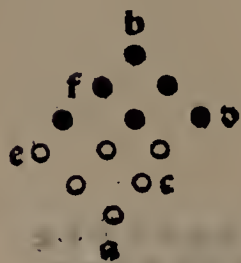
ꝙ p̄cedēs donec extremū ſit vnitas. et qꝛ ideo totidem erunt ordines quot in baſe ſunt vnitates: pꝫ retroagendo vnitatē eſſe primū potentia triangulū cui due adiuncte ſecundū claudunt triangulum: cui ſecundo tres addite facient tertiū: qꝛ ſemper eſt vnitate maior precedēti. et ita cōſequenter ſcđm naturalem numerorū progreſſum ſicqꝫ propoſitio ⁊ correlariū nota ſunt.

2 ¶ Si a quolibet triangulari numero latus ſuum detrahatur: relinquetur triangulus ipſi deſcendendo proximus.



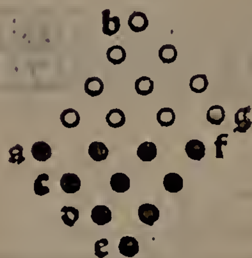
¶ Triāgulus triāgulo deſcendēdo proximus: eſt cuius latus latere alterius eſt vnitate minus. a triāgulo ergo a b ſubſtracto latere a b: dico ꝙ relinquit triāgulus ipſi triāgulo a b deſcēdendo proximus nā qꝛ triāgulus a per p̄cedentē habet tria latera equalia: et ſequētia ſola vnitate vincentia. ſubſtracto ergo latere a b erūt reliqua latera vno cōtractiora. ſꝫ ⁊ qꝛ vnitatū ordines ſm̄ vnitatē ſemꝑ decreſcūt pꝫ per correlariū precedētis reſiduū eſſe triāgularē. ⁊ qm̄ latus eius vnitate vinci a latere triāguli a b cognitū eſt: patet relictū triāgularem eſſe proximū deſcēdendo triāgulo a b: qđ eſt propoſitū.

3 ¶ Omnis triangularis duplicatus: parte altera longiorem efficit.



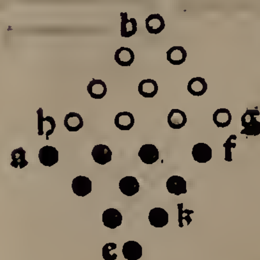
¶ Sumātur a et b duo triāgulares equales: adiiciaturqꝫ lateri c trianguli a d extrema vnitas triāguli b. itidē lateri f triāguli b adiiciatur e extrema vnitas triāguli a: fientqꝫ duo latera vnitate quotlibet latus a triāgulorꝫ a et b ſuperātia. et ſi addis aptaſqꝫ hoc pacto medios ordines vnius mediis ordinibꝰ alterius: fient per tertiam primi cōpoſiti ordines ſibi mutuo et extremis ordinibus e f et c d equales. verbi cā vt ſi ordinē ſequentē latus c addis adaptaſqꝫ ordini ſequenti vnitatē d. qꝛ enī per correlariū prime huius ordo ſequens latus c tantū diſtat ab c q̄tum ordo ſequens vnitatē d diſtat ab d. ergo per tertiā primi illi ſimul iuncti equātur ordini c d. et ita de aliis mediis ordinibꝰ ſi qui medij relicti ſunt tunc ergo cōpletus erit quadrāgulus cuius latera oppoſita erunt equalia ⁊ ob hoc equidiſtātia. vt qꝛ latus e f equale eſſe mōſtratū eſt lateri c d et mediis: ergo vnitates lateris b d equidiſtabūt vnitatibꝰ lateris a e. ⁊ ſimiliter qꝛ latus b d equatur lateri e a. nā ſunt latera triangulorꝫ equalium et mediis ordinibus: latus e f equidiſtabit lateri c d. ⁊ qꝛ latera b d et e a oppoſita ⁊ equidiſtātia ſunt latera triangulorū aſſignatorꝫ: ⁊ duo reliqua e f ⁊ c d ſimiliter oppoſita ⁊ equidiſtātia quorum quodlibet reliquo aliorū vnitate ſunt maiora. patet ꝑ diffinitionē totā figurā a b d e ex duobus equalibus triāgularibꝰ cōſtitutam (quare ⁊ ex triāgulari vno duplicato) eſſe altera pāte longiorē: quod eſt propoſitū.

4 ¶ Cuiuſlibet altera parte longioris: medietas eſt triangularis.



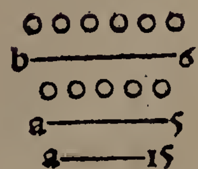
¶ Hec eſt cōuerſa precedētis. Sit altera parte longior quicunqꝫ a b e ⁊ vnum eius longius latus a b. dico eius medietatē eſſe triangularē. de latere enim longiori a b detraho vnitatē a et de c ſecundo ordine duas: de d tertio tres: de e quarto quattuor. ⁊ ſi plures ſunt tot cōſequenter auferā quotus ordo ille fuerit ab vnitate: per correlariū p̄me huius totus detractus vt a e f eſt triangularis. et per idem qꝛ continue minus vno relinquebatur vſqꝫ ad vnitatem: relictus eſt triāgularis. ſed et qꝛ detracti latus e f equatur reſidui lateri g b. nam latus g e ſuperabat latus g b vna vnitate: ſed ⁊ g e ſuperat latus f e vna vnitate. equantur igitur g b et f e: quare ⁊ reliqua vnius reliquis alterius cum per primā huius omnis triāgularis ſit equilatꝰ ⁊ totus trigonus a e f toti trigono a b g equalis. eſt igitur datus altera parte longior in duas medietates diuiſus quarꝫ quelibet eſt triāgularis: quod eſt propoſitū.

5 ¶ Quilibet duo triangulares proximi: tetragonum conſtituunt



¶ Sit vt in precedēti a b g e quicunqꝫ altera parte longior qui per eandem diuidatur in b g h et e a f duos triāgulos equales. erit vt a e ſit latus triāguli e a f et latus b a altera ꝑte longioris ⁊ ſuū oppoſitū ſc̄ g maius latere a e ⁊ ſequētibus ordinibꝰ vnitate. Ammoto ergo latere a e remanebit b h equale lateri h k: k g et g b. ⁊ ideo quatuor illa latera adinuicē diſtantia: quod ergo per diffinitionē relictum eſt: eſt tetragonus. ſed ⁊ ammoto latere a e ab trigono a e f per ſecundā huius relinquitur triangularis triāgulari a e f proximus: quare ⁊ triangulari h b g ſibi equali proximus. conſtat ergo tetragonus h k g b ex duobus proximis triāgularibus: quod eſt propoſitū. ¶ Poteſt quoqꝫ et id eſſe notum quod triceſimoquinto capitulo ſue Arithmetices diuus affert Seuerinus omnē tetragonū ſi ei proprium latus adiiciatur aut ab eo detrahatur altera parte longiorem fieri. Nam cum tetragonus omnis vndiquaqꝫ latera equalia poſſideat: ſi cuipiā vnum latus adiiciatur efficientur latera vnitate diſtantia porro ſi latus vnum a quopiam detrahatur: relinquētur latera vnitate diſtātia: quare vtrobiqꝫ facti erunt altera parte longiores. Quo fit iterū vt proximi quiqꝫ altera parte lōgiores a medio tetragono equali differentia diſtent. Nam equali latere ſubſtracto ⁊ addito.

6 ¶ Latere ꝓpoſito numeri triāgularis ſummā inuenire. Unde manifeſtū eſt ſi datus ſit numerus impar ſummā triangularis prouenire ſi paris proxime maioris ſubduplum in ipſum imparē ducatur. et ſi numerus ſit par: ſumma triangularis proueniet ſi paris medietas in imparem ducatur proxime maiorem.



¶ Sit a datū latus cuiuſlibet numeri triāgularis cuius ſumma queritur: duco a in b proximū numerū maiorē ⁊ per diffinitionē proueniet altera parte longior cuius b maius latus erit vnitate maius a mi

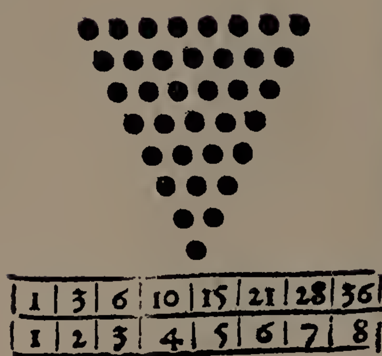
noꝛe latere ⁊ latere triãguli cuius summa petit. per quartã ergo huius summa triãguli petiti est me= dietas altera parte longioꝛis inuenti: sicq; constat ꝓpositum. ¶Coꝛrelariũ ex demõstratione conclu sionis adiuuãte decima pꝛimi notũ est. et hec cũ coꝛrelario suo pꝛaxim ꝓgressionis demõstrat.

¶Omne perfectum est trinum.

¶Ternarius totus est religione sacer et a Pythagoꝛicis Magis et Sacerdotib9 olim in arcanis mi= rum in modum veneratus. et Aristoteles Pythagoꝛicoꝝ symbolis insistens coꝛpoꝛeã magnitudinẽ ipsumq; vniuersum perfectũ astruit ꝙ ipsum trinũ sit imovero trinũ est: qꝛ ipsum perfectũ est qꝺ pꝛio Pythagoꝛas cõperit in numeris: numeroꝛũq; mysteriis. hic ergo suscipit demonstrãdum omnẽ nu= merum perfectũ esse trigonum. Nam per tricesimãsecundam septimi quotcunq; nũeri pariter pares cõnumerata vnitate coaceruãti efficiunt numerũ pꝛoximo sequente pariter pare: vnitate minoꝛẽ qui quidem pꝛoxime sequens pariter par per vicesimãnonam septimi est coaceruatoꝛũ maximi duplus: quare totus coaceruatus est impar. at per sexagesimã septimi oĩs numerus perfectus gignitur ex co aceruatione vnitatis et pariter pariũ quoties coaceruat9 est pꝛimus qui vt dictũ est ꝑ vicesimãnonã septimi sola vnitate distat a pꝛoximo pariter pari: qui ad aggregatoꝝ maximũ duplus est. ergo maxi= mus aggregatoꝛũ subduplus paris numerũ aggregatoꝝ imparẽ pꝛoxime sequẽtis: in ipsum imparẽ ductus: per pꝛimã partem coꝛrelariꝫ pꝛecedẽtis cõstituit numerũ triangularẽ. est igitur oĩs numerus perfectus triãgularis atq; trigonus: qꝺ est pꝛopositũ. Et eius latus ꝑ pꝛecedẽtem ⁊ coꝛrelariũ pꝛime huius erit ille impar ex omnibus coaceruatus.

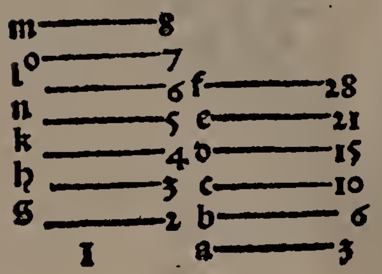
¶Omnis numerus par media sui parte multiplicatus tanto minoꝛẽ summã ꝓducit ꝙ̃ omnes summe que in ipso sunt coaceruate: ꝙ̃tum sua ipsius medietas.

¶Hec ex analyticis numeroꝛũ deprõpta est. et ex scꝺa parte coꝛrelariꝫ supioꝛis cõclusionis adiuuãte nona pꝛimi ⁊ cõi dignitate: vnitatẽ in quẽcunq; numerũ ductã: ipsum ꝓducere: stati cognita esse põt.



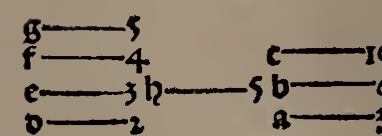
¶Si sumantur triangulares ab vnitate: duos pꝛimos impares et sequẽtes duos pa 7
res atq; ita vicissim duos et duos impares atq; pares inueniri necesse est.

¶Quia enĩ per coꝛrelariũ pꝛime hui9 triãgulares creãtur ex nũeris oꝛdine cõtinuo ab vnitate dispo sitis et vnitas pꝛimus est potẽtia triãgularis ⁊ potẽtia impar. addita igit numero sequẽti q̃ est par cõ stituet ꝑ coꝛrelariũ pꝛime huius ꝺm triangularẽ ⁊ per secundã septimi imparẽ. erunt ergo duo pꝛimi triãguli nũeris hoc pacto dispositis ipares. Sed ⁊ qꝛ tertius numer9 est ipar et cũ pꝛecedẽti triãgulo ꝑ idem coꝛrelariũ cõstituit triangulũ ⁊ ꝓcedens mõstratus est ipar: ergo ꝑ tertiã septimi tertius triã= gularis erit par. et qꝛ quartus ab vnitate nũerus est par q̃ cum ꝓcedẽti triãgulo pari ꝑ idem cõstituit quartum triangulum. ergo quartus triãgularis per pꝛimã septimi est par. erunt ergo duo sequentes pares. et iisdem rationibus mõstrentur duo sequẽtes esse impares ⁊ vicissim aliꝫ duo sequẽtes pares sicq; sine difficultate certum apparebit pꝛopositum.



¶Si post vnitatem sumantur numeri triangulares: inter duos et duos disiunctim: 8
erunt que inter numeros ab vnitate naturali serie: sumpte pꝛopoꝛtiones.

¶Sit pꝛimus triãgularis post vnitatẽ a ⁊ b c d e f oꝛdine ꝯsequẽtes sitq; vnitas et g h k nũeri ab vni tate naturali serie ꝓcedẽtes: dico que ꝓpoꝛtio g ad vnitatẽ eã esse b ad a: et q̃ h ad g eã esse d ad c: ⁊ que k ad h eã esse f ad e. ⁊ ita ꝓcedẽdo in his disiũctim: in illis vero cõiuncti. nam ꝑ pꝛecedẽtem a est ipar b c pares: d e ipares: et f par. sumo enĩ quattuoꝛ pares ab vnitate q̃ sint g k l m et mediꝫ inter eos im= pares sint h n o. et qꝛ g q̃ est binari9 est latus a q̃ est ternari9. ⁊ per coꝛrelariũ pꝛime hui9 h latus b ⁊ k latus c et n latus d ⁊ l latus e et o latus f: ergo ꝑ quartã huius g in h facit altera ꝑte longioꝛẽ duplũ a et h in k duplũ b ⁊ k ĩ n duplũ c et n in l duplũ d ⁊ l in o duplũ e: atq; per eandẽ o in m duplũ f. qꝛ ergo g in h et k in h cõstituunt duplũ ad a et ad b. erit ergo per octauã secundi vt que ꝓpoꝛtio k ad g ea sit dupli b ad duplũ a: sed ⁊ b ad a subduplus ad subduplũ per coꝛrelariũ decimequarte secũdi sicut eoꝝ duploꝛũ duplus ad duplum. ergo sicut k ad g ita b ad a. et per idẽ sicut l ad k ita d ad c. ⁊ sicut m ad k ita f ad e. ⁊ cũ g k l m sint sumpti ab vnitate cõtinue pares: ergo ꝑ decimãoctauã septimi est ꝓpoꝛtio b ad a vt g ad vnitatẽ ⁊ d ad c vt h ad g et f ad e vt k ad h: quod est pꝛopositum.



¶Si tres continui triangulares statuantur: qui sub extremis continetur erit altera 9
parte longioꝛ: cuius laterum maius erit illoꝛum trium medius.

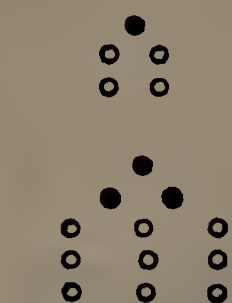
¶Sint a b c tres continui triangulares ⁊ eoꝛũ latera d e f: sitq; g vno maioꝛ f. dico qꝺ fit ex a in c esse altera ꝑte longioꝛẽ cui9 maius latus erit b. nã qꝛ a b c sunt ꝯtinui triãgulares: ergo ꝑ coꝛrelariũ pꝛĩe huius d e f sunt ꝺm continuã seriẽ numeroꝝ sumpti. et qꝛ per quartã huius d in e cõstituit duplũ ad a ergo si d est par quẽadmodũ hic est: medietas d in e cõstituit a. et per idem medietas f in e cõstituit b. et medietas f in g cõstituit c. si aũt d esset impar numeraret a ꝺm medietatẽ e: ⁊ f b ꝺm medietatẽ e. et sic cõsequenter ꝺm medietatẽ parium ipares numerarẽt triãgulares. ergo per octauã pꝛimi adiuuãte coꝛrelario decimequarte secũdi que ꝓpoꝛtio f ad d: ea est b ad a. et q̃ g ad e: ea est c ad b. ⁊ qꝛ a b c sunt continue sumpti triãgulares: ergo ꝑ coꝛrelariũ pꝛime huius b superat a ꝙ̃tum est e. sumo ergo h vno minoꝛẽ b: manifestũ est h superare a ꝙ̃tum est d. et quo abũdat c super b est f. ⁊ quia b ad a sicut f ad d diãm h ad a. et sicut detractus ad detractũ: ita residuus ad residuũ. erit ergo vt sicut b ad a ita c ad h totus ad totũ: quod igit fit ex a in c ꝑ vicesimãquintã secũdi tm̃ est ꝙ̃tum qꝺ fit ex h in b. at manifestũ est qꝺ fit ex h in b esse altera parte longioꝛẽ. igitur et qꝺ fit ex a in c. est altera ꝑte longioꝛ cuius maius laterũ est b illoꝛum triangulorũ medius. et propositum.

10 ¶Si sumātur primi post vnitatem par et impar: ⁊ cōposito ex ipsis minor addatur: itemq; ex his confecto minor adiiciatur: erit vt cum primorū primus sit par: sequētes sint impares. tertiorū primus par et sequentes impares ac sic deinceps. duploq; quadrati parium et quadrato extremi impariū: tetragoni triāgulares terminētur.

I	2 a	3 b	5 c	7 d	12 e	17 f	29 g 41 h
4	9	25	49	144	289	841	1681
		k	l	m	n	o	p
Q	A	B	D	R	B	T	Z
Duplus 8		Duplus 50		Duplus 288		Duplus 1682	
36		1225		41616		1413721	
Te	tra	go	ni	tri	an	gu	la res

¶Sint a et b numeri primi post vnitatē par ⁊ impar binarius scʒ atq; ternarius q̄ iuncti faciāt c cui addito a fiat d. item c et d cōponent e cui addat c ⁊ fiat f atq; e ⁊ f componant g et e addatur g ⁊ fiat h. dico primo a esse parē et b imparē ⁊ c d impares. item e parē f et g h impares. a enī esse parem ⁊ b imparem est hypothesis. et qꝛ c cōponitur ex a ⁊ b: per secundā septimi c etiā est impar. et qꝛ d constat ex a pari et c impari per eandē secundā d est impar. ⁊ qꝛ e constat ex c d duobus imparibus e per quartā eiusdē erit par. et qꝛ f constat ex c ⁊ e impari atq; pari per secundā eiusdē f est impar et per eandē erūt g et h impares: qđ intendebat. Secūdo dico duplū quadrati a terminare tetragonicū triangularem. terminare enī tetragonicū triangularē est esse latus quadrati qui pariter est ⁊ triāgularis. Patet id nā qꝛ vnitas duplicata cōstituit a et a bis sumptus suum perficit quadratū: duabus igit vnitatibus a distat a suo quadrato et vnicum suscipit mediū scʒ b: cuius differētia ad a est vnitas. et qꝛ per septimā sexti quo abundat quadratus b super quadratū a est quod fit ex vnitate in b et a simul. sed b et a simul sunt vno maius quadrato a qui duplus erat ad a. igitur quadratus b est vno maior duplo quadrati a. sed ⁊ qꝛ duplū quadrati a in quadratū b cum sola vnitate distent ꝓducit per diffinitionē altera parte longiorē quadratus a qui est medietas in quadratū b per octauam secundi ꝓducit illius altera parte lōgioris medietatē. ergo per quartā huius quadratū a in quadratū b producit triāgularem. ⁊ qꝛ producitur ex ductu quadrati in quadratū: ergo per decimāquartam sexti idem erit ⁊ tetragonicus. effectum est ergo qđ dicebat. Tertio dico quadratū d extremi impariū terminare tetragonicū triangularem. sumo enī quadratū c qui sit lꝛ ⁊ quadratū d qui sit l: dico lꝛ duplicatū excedere vno l. nam quadratum c duplicatū per decimāquintam primi est tanq̄ duplū quadrati a et duplū quadrati b. et quod fit ex b in a quater et qꝛ per eandē decimāquintam quadratū d est q̄tum c in se et a in se ⁊ a in c bis: sed c in se est tātum per eādem q̄tum b in se et a in se et a in b bis. et a in c bis est tm̄ per nonā primi q̄tum a in se bis et a in b bis. ergo qđ fit ex d in se est q̄tum quod fit ex b in se et quadruplū quadrati a ⁊ quadruplum ꝓducti ex a in b. sed cum duplū quadrati c sit monstratū q̄tum duplum quadrati b et duplū quadrati a et quadruplū quod fit ex a in b: et ex secunda parte huius quadratū b excedat vno duplum quadrati a. sit ergo vt duplum quadrati c cōtinens quadratū b loco huius q̄ quadratū d ꝯtinet duplū quadrati a ceteris omnibus cōsimilibus excedat vno quadratū d. duplū ergo quadrati c in quadratū d per diffinitionē producit altera parte longiorem cuius longius latus excedit vno quadratū d. illius ergo dupli dimidius qui est quadratus lꝛ in l quadratū d producit illius altera parte longioris dimidium per octauam secundi qui per quartam huius est triangularis et cuius latus est l quadratus extremi imparium qui et idem per decimāquartam sexti est tetragonus. et hac ratione de sequentibus molire id quod propositū est ostendere: et omnino constabit propositum.

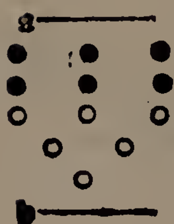
¶ Si ab vnitate continue designentur parte altera logiores et quadrati: duo ⁊ duo cõ iuncti: triangulares omnes efficient. 11



¶ Designo ab vnitate a b c quadratos et ab vnitate altera parte lõgiores qui sint d e f: dico quoslibet duos ꝓximos quadratũ et altera parte lõgiorem simul: cõstituere triãgularem. nã si fuerit primꝰ quadratus q̄ est vnitas ⁊ primus altera parte lõgior qui est binarius manifestũ est illos simul additos ꝑ correlariũ prime huius cõstituere triãgularẽ. ꝙ si fuerit a scd̃us quadratꝰ ⁊ d primus ab vnitate altera ꝑte lõgior sitt per vicesimãsextã septimi quadratus a ꝯstat ex ĩparibus ab vnitate scʒ ex vnitate ⁊ prio ĩpari ⁊ d est p̃mus par: quare si resoluat a erũt accepti cõtinue numeri ab vnitate. ꝑ correlariũ igitur p̃me huiꝰ ꝯstituũt triãgularẽ. ⁊ ita ostẽde a et e cõstituere triãgularẽ resoluto a in suis ĩparibus ꝑ 26 septimi ⁊ e in suis paribus ꝑ vicesimãsextã eiusdẽ. et ita de quibuslibet duobus hoc mõ sumptis.

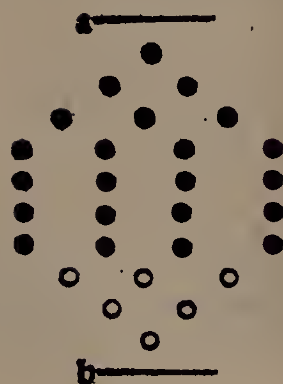
¶ Si sumantur triangulares et tetragoni: fuerintq̃ȝ illi toti triangularium ab vnitate quoti isti tetragonorũ post vnitatem: coniuncti facient numeros pentagonos. 12

¶ Nam si vnitati que est primus trigonus adiungas primũ quadratũ post vnitatẽ qui est quaternariꝰ fiet pẽtagonus post vnitatẽ habẽs quinq̃ȝ latera equalia. et si capis scd̃m trigonũ ab vnitate habebit binariũ in latere ⁊ secũdus tetragonus post vnitatẽ habet ternariũ in latere. adiecto ergo latere quadrati fiet per correlariũ prime huiꝰ triãgulus sequẽs habens latus trium vnitatũ et figura pẽtagona recipiens totidẽ in quolibet eius latere vnitates. et q̃ semper totus tetragonus post vnitatẽ habebit vno plus in latere q̃ trigonus totus ab vnitate: hac rõne de quibuslibet aliis ꝓpositum efficere. ⁊ q̃ latera illorũ pentagonoꝝ equalia sunt lateribus tetragonorũ datorum: hinc etiã fit vt illi pentagoni toti sint post vnitatẽ quoti ⁊ tetragoni. ¶ Et ex hac ⁊ vicesimasexta septimi cognoscit̃ q̃d diuꝰ Seuerinus asserit boetius: 14 capite secundi sue institutiõis arithmetice: pẽtagonoꝝ generationẽ nasci ex numeris naturali serie ordinatis quãdo cõtinue duo a monade duoꝝ semper in medio facta intermissione iungũtur. Nam per p̃sentem accepta vnitate que est primus trigonus ⁊ quaternario tetragonꝰ duoꝝ in medio binarij scʒ atq̃ȝ ternarij facta int̃missione iunctis: fit secũdus pẽtagonus duo in latere gerẽs. At rursum duobus intermissis septenarius acceptus quinariũ includit ⁊ binarium. At quinarius impar per vicesimãsextam septimi additus tetragono quaternario: proximũ cõstituit tetragonũ ⁊ binarius vnitati adiectus per correlariũ prime proximũ vnitati cõstituit trigonum. ergo ꝑ presentẽ vnitas 4 et 7 cõstituunt pentagonũ. At rursus duobus dimissis post septenariũ accepto denario qui 7 includit sequentẽ imparẽ ⁊ ternarium: qui septenarius quadrato prioris pentagoni additus ꝑ vicesimãsextam septimi succedẽtem constituit quadratũ et ternarius trigono pentagoni adiectus propinquum trigonum. erit igitur per presentẽ numerus ex vnitate 4/7 et 10 constitutus pentagonus: ⁊ ita de quibuslibet aliis argumentabere.



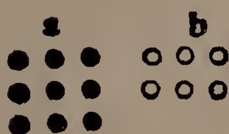
¶ Si parte altera longior cum toto post vnitatem triangulari coniungatur: compositus erit pentagonus post vnitatem totus. 13

¶ Sit a aliquotus ab vnitate altera parte longior vt secũdus: cuius ideo minus latus erunt due vnitates: sitq̃ȝ b triãgulus totus post vnitatẽ cuiꝰ latus ideo erit ternarius ⁊ equale maiori lateri altera parte longioris. adiungo ergo maius latus trigoni b maiori lateri altera parte longioris a: et fiet tetragonus sed ⁊ illud quod restat dempto maiore latere b per secundam huius est triangulus minor descendendo ergo per precedentem ille cum quadrato ex altera parte longiore ⁊ lõgiore latere trianguli cõstituto: erit pentagonus: quod est propositum.



¶ Quilibet pentagonorũ post vnitatẽ cum toto triangulari ab vnitate: hexagonum post vnitatem simili loco positũ constituit: et huiusmodi tetragonicus dicatur. 14

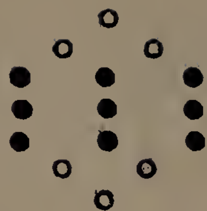
¶ Unitas oĩs numeri potestatẽ optinere dicit̃ cuius equalia latera designãtur. hinc ipsa est primus triangulus primus tretragonus pentagonus hexagonus ⁊ ita deinceps. et predictorũ numerorum primus post ipsam est cuius latus fuerit binarius: ⁊ secũdus post ipsam cuius latus fuerit ternarius secũdus vero ab vnitate cuius latus fuerit binarius. et dicitur hexagonus tetragonicus cuius latus est equale lateri medij tetragoni. dico ergo ꝙ si capiatur aliquotus pẽtagonus post vnitatẽ vt a: qui verbi causa post vnitatẽ sit tertius et b totus triãgulus ab vnitate: dico a cum b cõstituere hexagonũ post vnitatẽ totum pariterq̃ȝ ⁊ tetragonicũ. nam per duodecimã huius quotus pẽtagonus fuerit post vnitatẽ ex toto post vnitatẽ tetragono constat et triãgulari ab vnitate toto. ergo equalis triãgularis qui est quẽ propõ proponit ex opposito tetragoni latere appositus hexagonũ constituet: cuius latus erit equale lateri medij tetragoni. et q̃ latus eius ẽ equale lateri medij tetragoni est ⁊ equale lateri pentagoni quare ⁊ hexagonus totus erit post vnitatẽ quotus et pẽtagonus. ⁊ q̃ eius latus est equale lateri medij tetragoni est idẽ ⁊ tetragonicus: q̃d est propositũ. Ex hac et duodecima huiꝰ ⁊ correlario p̃me cognoscẽ promptũ est g̃nationẽ hexagonoꝝ eo pacto q̄ docet Boeciꝰ 15 capite scd̃i arithmetices



¶ Oĩs tetragonus cũ precedẽte altera ꝑte longiore: hexagonũ tetragonicũ ꝯstituit. 15

¶ Primus enim altera parte longior post vnitatem est qui habet vnitatem minus latus ⁊ secundus qui hʒ duitatẽ et ita deinceps. ⁊ precedẽs tetragonũ est cuius minus latus est vno minus latere tetragoni qui ⁊ post vnitatẽ totus ẽ quotus ⁊ altera parte lõgior ab vnitate. dico ergo quẽcunq̃ȝ tetragonũ vt a cũ precedẽte altera parte longiore vt b cõstituere hexagonicũ tetragonũ. nã ꝑ quartã huiꝰ altera

parte lõgioꝛ b diuidiť in duos triãgulares quoꝝ vterq; totus eſt ab vnitate quotus pte altera lõgioꝛ poſt vnitatẽ: qꝛ latus illoꝝ triãgulorum equale ſit minori lateri altera parte lõgioris. quare ⁊ vterq; totus eſt ab vnitate quotus tetragonus a poſt vnitatẽ. vnus ergo illoꝝ trigonoꝝ per duodecimã hui⁹ cũ tetragono a cõſtituit pentagonũ poſt vnitatẽ totũ: ſed et per precedentẽ idem pẽtagonus cũ altero triãgulari qui eſt totus ab vnitate ↄſtituit hexagonũ tetragonicũ. a igitur cum b altera parte lõgioꝛe precedẽte cõſtituit hexagonũ tetragonicũ: quod erat demõſtrandum ⁊ ꝓpoſitum.



16 ❡ Si diſponanť triangulares ab vnitate: tertius atq; vno intermiſſo a prius ſumpto tertius: erit hexagonus.

❡ Nã per vndecimã huius diſpoſitis ab vnitate pte altera lõgioꝛibus et quadratis ſi duo ⁊ duo ↄiungãtur fient oẽs triãgulares. at cũ primus triãgularis poſt vnitatẽ fiat ex vnitate ⁊ p̃mo altera pte longioꝛe: ſcd̃us triãgularis poſt vnitatẽ q̃ eſt tertius ab vnitate fiet ex p̃mo tetragono poſt vnitatẽ ⁊ p̃mo poſt vnitatẽ altera pte lõgioꝛe per eandẽ vndecimã qui eſt tetragonũ precedẽs. ergo p̱ precedentẽ tertius triãgularis ab vnitate ẽ hexagon⁹. ſed ⁊ eadẽ rõne qꝛ vno intermiſſo tertius ſemp̱ a q̃drato et p̃cedente altera pte longioꝛe p̱ vndecimã huius naſciť: ergo per p̃cedentẽ tertius ſemper erit hexagonus quod eſt propoſitum.



17 ❡ Si ſex vnitates vni circũponantur: ita vt illarũ adinuicẽ ⁊ ad illam eadẽ ſit diſtãtia hexagonum equiangulũ conſtituent.

❡ Nã quelibet due illaꝝ vnitatũ cum media vnitate triãgulum equilaterũ conſtituunt. fient ergo ſex triãguli equilateri quos dico etiã eſſe adinuicẽ equiãgulos. nã cum illoꝝ vnitates abinuicẽ ⁊ a media diſtẽt vnitate: ſi vnitates vnius vnitatib⁹ cuiuſlibet alterius applicenť erunt ſupra ſe inuicẽ appoſite et ãguli vnius ãgulos alterius nõ excedẽtes: quare ſex ãguli hexãguli erunt equales. erit igitur talis hexagonus equiãgulus qđ intẽditur. et ita de tetragono equiãgulo ⁊ pẽtagono ſi placeret oſtẽdereť.



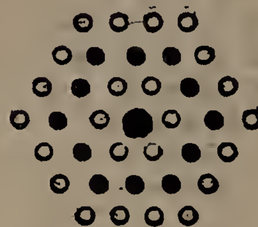
18 ❡ Latere propoſito hexagonum equiangulũ conſtituere.

❡ Sit a vnitates dati lateris q̃bus vna plures applico: ita ſemp̱ augẽdo donec tot ſint oꝛdines quot vnitates ſunt in latere. fiatq; hoc mõ deſcẽdendo donec tot cõpleanť oꝛdines quot vnitates ſunt in eodem latere. ⁊ qꝛ fiunt tria latera equalia aſcẽdẽdo et tria ſimilia deſcẽdendo p̱ꝫ creatũ eſſe hexagonũ quẽ dico equiãgulum. nã medius oꝛdinũ ſemp̱ per viceſimãtertiã ſeptimi ẽ impar ꝙ totus ſit a nũero lateris quotus nũerus lateris ab vnitate. habet igiť ille maximus numerus vnum mediũ: ⁊ ſi ſignas extremitates ſex laterum per b c d e f g erit illa media vnitas media oꝛdinis f c: e b: et oꝛdinis d g. qꝛ equales ſunt et ea cõtcant. diſtat ergo equaliť ab f ⁊ c et ab e ⁊ b et ab d ⁊ g. quare ſex triãguli: ſcꝫ media vnitas f e: media vnitas e d: media vnitas d c: media vnitas c b: et media vnitas b g: ⁊ media vnitas g f: adiuicẽ eq̃lateri ſunt et vt in p̃cedẽti equiãguli. ẽ igiť hexagon⁹ b c d e f g equiãgul⁹: qđ ẽ ꝓpoſitũ.



19 ❡ Si cuilibet hexagono equiangulo totus ſenarij multiplex addatur quotus ipſe eſt ab vnitate: ſimilem hexagonũ prouenire neceſſe eſt.

❡ Si p̃mo hexagono q̃ eſt vnitas ſenarius circũponať per penultimã fiet ſequẽs hexagonus equiangulus. nã habẽs duo in latere ꝙ ſi eoꝝ interualis que etiã ſunt ſex: ſex aptẽtur vnitates in eadẽ diſtantia: atq; ipſis ſex vnitatib⁹ alie ſex angulariť: fiet ſequẽs hexagonus equiãgulus habens ternariũ in latere. ⁊ vt precedẽs hexagonus ſecũdus erat ab vnitate ita acceptus eſt totus ſenarij multiplex: ſcilꝫ duplus ad ſenariũ qui eſt duodenarius: cui ſi rurſum circũponas triplũ ſenarij: ſcꝫ duodecĩ vnitates in duodecĩ interuallis et ſex ad ſexãgulares vnitates efficis ſequẽtem hexagonũ equiãgulum quivt in precedẽte probareť habet quaternariũ ſuũ latus. et qꝛ ſemp̱ ĩterualla creſcũt in ſenario tot ãgulis ſemp̱ manẽtibus appoſito ſequẽti ſenarij mltiplici ſemp̱ efficies hexangulũ equiãgulũ eadem rõne ſequẽtem: quod intendit propoſitio.



20 ❡ Si oꝛdinentur ab vnitate triangulares et ſinguli ſecundũ ſenarium multiplicẽtur: producti addita vnitate erunt hexagoni equianguli.

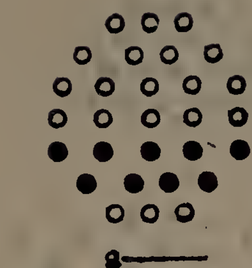
❡ Si enim vnitatẽ que primus triãgularis eſt ſenario multiplices: ſecũdus hexagonus naſcitur: qui addita vnitate circũcluſa cognoſciť ⁊ equiãgulus. et qꝛ per precedẽtem quilibet hexagonus tot addit ſenarios ſuper p̃cedẽtem quotus ipſe p̃cedẽs fuerit ab vnitate. ⁊ q̃libet triãgularis p̱ coꝛrelariũ p̃me tot hꝫ vnitates ſupra p̃cedẽtem quotus ipſe fuerit ab vnitate. ergo ſi ſcd̃s triãgularis q̃ ideo hꝫ duas vnitates ſupra primũ multipliceť p̱ ſex addet tot ſenarios ſupra p̃cedẽtem hexagonũ qui fuit ſcd̃us: quotus ipſe ſcd̃us hexagon⁹ fuit ab vnitate. ergo p̱ p̃cedẽtem erit ſequẽs hexagon⁹. ⁊ ita quoq; ťtio triãgulari q̃ addit tres vnitates ſupra ſcdꝫ p̱ ſex mltiplicato: ⁊ quolibet alio: addes ex multiplicatiõe tot ſenarios quotus ⁊ triãgularis ⁊ precedẽs hexagonus fuerit ab vnitate: ſicq; p̱ precedẽtem ſemp̱ concludes propoſitum.

21 ❡ Omnis hexagonus equiangulus tanto abundat ſuper hexagonum tetragonicum ſimili poſt vnitatẽ loco ſumptũ: q̃tus eſt tetragonus ab vnitate ſimiliter dictus

❡ Sit exẽpli cã a quartus ab vnitate hexagon⁹ tetragonic⁹ q̃ ⁊ tertius ẽ poſt vnitatẽ: ſitq; b totus ab vnitate tetragonus id eſt tertius: ⁊ quartus tetragonus c ⁊ medius altera parte lõgioꝛ d. dico tertiũ hexagonũ equiangulũ poſt vnitatẽ tantũ diſtare ab a q̃tus eſt b tertius ab vnitatẽ tetragonus. nam per decimãquintã huius c et d cõponunt a: ſed ⁊ qꝛ differẽtia b ad d per viceſimãquartam ſexti eſt ternarius latus b: ⁊ differẽtia c ad d eſt quaternari⁹ latus c. erũt ergo p̱ ſecundã primi b ⁊ c ſimul maius vno ꝙ̃ duplum d. capio e totum ab vnitate triangularem quotus eſt b tetragonoꝝ: quia minus latus

28	37
a	f
16	12
c	d
9	6
b	e

altera parte longioris d est latus b: quodquidẽ idem est latus e. ergo per quartã huius d erit duplus e: sed ⁊ b c mõstrata sunt vno maius duplo d. sunt ergo b c vno maius q̃druplo e: ergo b c d simul sunt vno maius sexcuplo e. at per p̃cedentẽ e sexies sumptus addita vnitate tertiũ post vnitatẽ creat hexagonum equiãgulum qui sit f. constat ergo f ex b c et d: sed a solũ constat ex c d vt ostensum est. abundat ergo f hexagonus equiangulus ab a hexagono tetragonico toto post vnitatẽ q̃tum est b totus ab vnitate tetragonus: qđ est propositũ. ¶ Animaduerte quẽadmodum diuus mõstrat seuerinus heptagonos continue fieri ex hexagonis et inferioribus trigonis duobus equis ĩferioribus eminus adiũctis trigonis. quod ⁊ idem euenit si dispositis naturalit̃ numeris: extremi cõtinue quattuor in medio relictis iungãtur. vt secũdus heptagon⁹ fit ex senario scđo hexagono ⁊ vno: p̃mo trigono emin⁹ equali adiũcto trigono. qui idẽ fit ex vno et senario quattuor in medio p̃termissis numeris: ⁊ tertius heptagonus fit ex 15 tertio hexagono ⁊ ternario scđo trigono e regiõe adiũcto equali trigono hexagoni qui idẽ fit ex vno senario ⁊ vndenario. et hoc pacto in figuratione ⁊ collectione suorũ numerorũ in ceteris est procedendum.



¶ Supra datum numerum octogonum equilaterum constituere. 22

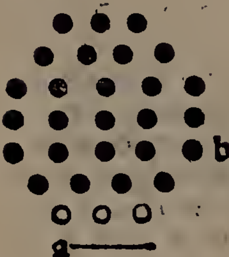
¶ Sit a datus nũerus supra quẽ iubemur octogonũ equilaterũ cõstituere. ꝓcedo ei apponẽdo ordĩes vno semper se excedẽtes donec totidẽ sint quot sunt vnitates ĩ latere: erũtq facta tria latera equalia et maximo ordini addo ordĩes equales quousq tot sint quot sunt vnitates in latere erũtq facta quinq latera equalia. deinde ab vltimo ordine ꝓcedendo appono ordines cõtinue vnitate minores donec tot sint quot in dato latere vnitates fientq sic descẽdendo tria latera p̃dictis equalia eruntq simul octo equalia latera atq octogonus equilaterus cõstitutus: qđ erat faciendũ. ¶ Alia apud diuũ seuerinũ octogonorũ inueniẽdorum ratio modusq est vt cõtinue ex toto heptagono et sub se trigono surgant. ⁊ idẽ fiunt si ex dispositis naturalit̃ numeris cõtinue in medio quinq relictis: extremi iungãtur. vt si 7 scđo heptagono iungas vnum primũ trigonũ surgit octonarius et scđus octogonus. qui idẽ fit ex vno et septẽ quinq numeris binario ternario quaternario quinario senario ĩterstitibus: dimissis. et si 18 tertio heptagono iungas ternariũ: secundũ trigonũ: fiet 21 tertius octogonus. qui idem colligitur ex 1/7/13/ ⁊ hoc pacto in reliquis est procedendum



¶ Si cuilibet hexangulo equiangulo post vnitatẽ: totus tetragonus ab vnitate cum sequẽte altera parte lõgiore iungatur ꝓueniet octogon⁹ post vnitatẽ sibi loco sumpt⁹. 23

¶ Sit quilibet hexagonus equiãgulus cuius latus sit a et maximus ordinũ eius sit b qui addat sup a numerũ c. qm̃ enim hexagonus datus habet triãgulorũ in media vnitate cõicantium latera equalia: hinc ordinis b maximi: linea minor est vno: duplo lateris a ergo c minor vno q̃ a. addo ergo ad b ordines equales secundũ c. et q2 ab a ad b fiunt tria latera equalia fient rursus ab b cum additis ordinib⁹ duo alia equalia quibus addo relictos hexagoni post b: fientq rursus tria alia reliquis equalia eritq formatus octogonus. et q2 per nonã primi c in b ꝫm ordines additos est tantum q̃tum c in se ⁊ in a. at qđ in se facit est tetragonus: et quod in a facit est altera parte lõgior. cum c et a sola vnitate distent: et tetragonus ille totus sit ab vnitate quotus octogonus formatus post vnitatem. nam hexagonus vno maius latus habet latere tetragoni: ⁊ altera parte longior sequẽs tetragonũ. cõstat ergo q hexãgulo equiãgulo assignato post vnitatẽ: additus totus ab vnitate tetragonus cũ sequẽte altera p̃te lõgiore cõstituit octogonũ qui cũ equalia hexagono latera hẽat: totus erit post vnitatẽ octogonus: ⁊ ꝓpositũ.





¶ Formarũ sex equilaterarũ quãlibet ꝫm vnitatũ dispõnem figuraliter cõstituere. 24

¶ Si enim triãgulos tetragonos pẽtagonos hexagonos tetragonicos hexãgulos equiãgulos ⁊ octogonos secundũ vnitatũ dispõnem figuraliter cõstituere desideras: ex prima huius trigonos figurare disce. ex quĩta tetragonos: ex duodecima pẽtagonos: ex decimaquarta hexagonos tetragonicos: et ex decimaseptima ⁊ decimaoctaua hexagonos equiangulos: et ex vicesimasecunda octogonos. sicq peruium habebis propositum.

¶ Latere dato figurarum preassignatarũ cuiuslibet summã reperire. 25

58 q——	12 p——
37 o——	9 h——
28 m——	14 g——
22 l——	11 f——
16 k——	8 e——
10 h——	5 d——
	3 c——
	4 2 a——b

¶ Sit latus datũ a qui ponat̃ esse par ⁊ medietas a sit b: sitq c minor vno a ⁊ d eodẽ vno maior. addito q c ad d fiat e. ⁊ iterũ c addito ad e fiat f. et sic̃ c addito ad f fiat g: ducat̃q b in d et sequentes ⁊ ꝓueniant h k l m. q2 enĩ a in d ꝯstituit altera p̃te longiorẽ cuius triãgularis lateris a est medietas. ergo p̃ quartã huius b medietas a in d ꝓducit triãgularẽ lateris a: sicq h ostẽdit summã triãgularis lateris dati. et q2 c d simul cõstituũt e qui p̃ secundã primi est duplus a. ergo b a e sunt cõtinue ꝓportionales qđ ergo fit ex b in e per vicesimãsextã secundi est quadratũ a. et cũ id sit k ostendet k summã tetragoni lateris dati a. ⁊ q2 qđ fit ex b in f per nonã primi tm̃ est q̃tum qđ ex b in e ⁊ in c. et cum c in a cõstituat altera parte longiorẽ cuius medietas est triãgulus c per quartã huius. ergo b medietas a in c ꝓducit triangularẽ cuius latus est c. sed et b in e ꝓducit tetragonũ a qui totus est post vnitatẽ quotus triangularis c ab vnitate. ergo per duodecimã huius b in f ꝓducit totum post vnitatẽ pentagonũ. at ille est pentagonus a et productus est l. ostendet igitur l summam pentagoni lateris a. ⁊ q2 quod fit ex b in g est tãtum q̃tum quod fit ex b in c et in f. ⁊ dictum est ex b in c fieri triãgularem totum ab vnitate quotus est post vnitatẽ pentagonus ex b in f factus. ergo per decimãquartã huius b in g constituet hexagonum tetragonicũ totum post vnitatẽ quotus ⁊ post vnitatẽ est pentagonus at hexagonus ille erit hexagon⁹ a ⁊ ꝓductus m monstrat itaq m summam hexagoni a: lateris assignati. Duco item c in se ⁊ ꝓueniat n qui erit totus ab vnitate tetragonus quotus hexagonus tetragonicus m est post vnitatẽ. addo ergo m et n simul ⁊ proueniat o qui per vicesimã primam erit hexagonus equiangulus a. nam totus post vnitatẽ quotus hexagonus m. duco item c in a: et ꝓueniat p qui erit altera parte longior

ſequens tetragonum c ſcꝫ n. additis ergo iterum n ⁊ p tetragono ſcꝫ et ſequẽte altera parte longiore hexãgulo equiãgulo o ꝑ viceſimãtertiã huius ꝓuenit octogonꝰ totus poſt vnitatẽ quotus poſt vnitatẽ erat hexãgulus equiãgulus o. quare octogonus ꝓueniẽs qui ſit q erit octogonꝰ lateris dati a atqꝫ ſummã petitã oſtendẽs. Sed eſto rurſus a latus datũ numerus ĩpar et b c circũpoſiti pares b minor ⁊ c maior et medietas b ſit d et medietas c ſit e: per ſecundã primi d ⁊ e ſimul cõſtituent a. addo d ſuper a et fiat f: ⁊ ſuper f e fiat g: ⁊ duco a in e ⁊ ꝓueniat h qui ea ratione qua ſuperius erit triãgularis a. et duco a in ſe ⁊ ꝓueniat lz qui erit eius tetragonus et a in f ⁊ ꝓueniat l: qui ea ratione qua prius erit pentagonus a et duco a in g ⁊ ꝓueniat m qui etiã per decimãquartam huius erit hexagonus tetragonicus lateris dati a: ſcd et hexagonũ equiãgulum et octogonũ a quere vt paulo ante monſtratũ eſt.

4 2 2 c e a 3 2 1 b d

o 19 n 19 m 15 l 12 lz 9 h 6 g 5 f 4

26 ¶ Omnis pyramis cuiꝰ baſis triãgula eſt: quattuor triãgularibus et equalibꝰ ꝯſtituitur.

¶ Nã tres a tribus lateribꝰ baſis triãgulares erigũtur ꝙ ſimul applicãtur atqꝫ cõueniunt ⁊ baſis eſt quartus triãgularis. Et qm̃ duo et duo latus habent cõmune: erunt omnes inter ſe equilateri: quare et equales. quod igitur aſſeritur per diffinitionẽ ratum eſt.

27 ¶ Si triãgulares ab vnitate in altum ſibi continue adaptentur: ꝓueniẽt omnes ab vnitate pyramides: ⁊ cuiuſlibet baſis erit triãgulorum ſuorũ maximus.

¶ Sint a b c d e f ad f vſqꝫ vnitatẽ ſcꝫ quotlibet ſumpti triãgulares cõtinue vno minores ꝙ ſibi inuicẽ eo ordine aptẽtur applicẽturqꝫ: ita vt b ſupponatur a: et c ſupponatur b: et d ipſi c: ⁊ e ipſi d: et f itidẽ ipſi e dico pyramides ab vnitate eſſe ſumptas oẽs ⁊ cuiuſlibet baſim ſuorꝫ triãgulorꝫ eſſe maximũ. cum enĩ numeri illi in altũ conſtituti in vnitatẽ conueniãt per diffinitionẽ conſtituũt pyramidẽ: erũtqꝫ ꝑ correlariũ prime huius oẽs ab vnitate ſumpti triãgulares. ſi itaqꝫ vnitatẽ conſideras eadẽ eſt et prima potentia pyramis. ſi ꝓximũ triãgularẽ cuius latus eſt binariꝰ cũ ipſi ſuprapoſita coaptataqꝫ vnitate appoſiti appareãt equales ſimulqꝫ cõueniẽtes triãgulares: erit cõſtituta ſcda pyramis cuiꝰ latus erit ſecundus triãgularis. et cũ ſint in altũ continue accepti triãgulares erit ⁊ tertia pyramis cõſtituta cuiꝰ latus erit tertius triãgularis: et quarta cuius quartus triãgularis erit latus atqꝫ ita deinceps. ſed ꝙ cuiuſlibet baſis ſit ſuorꝫ triangulariũ maximus hoc idẽ eſt ꝙ ꝑ precedentẽ baſis ẽ triãgularis cuilibet triangulariũ laterum equalis. ſi itaqꝫ latus ſit quintus triãgulus ꝑ correlariũ prime huius ex oĩbus precedẽtibus triãgulis ꝯſtitutus ita et baſis quintus erit triãgulus ⁊ ex oĩbus inferioribꝰ cõſtitutus qui erit illius pyramidis maximus: et ita de quacũqꝫ alterã ſicqꝫ cõſtare poteſt ꝓpoſitũ

f e d c 15 b 21 a

28 ¶ Si cuilibet numero equaliũ laterum oẽs ab vnitate ſibi ſimiles in altũ apponãtur: qui cõponentur erit pyramis baſemqꝫ ipſius eãdem eſſe cõueniet. ſi vero citra vnitatẽ huiuſmodi eiuſdẽ generis formarũ in altum ſuppoſitio erectioqꝫ deficiat: quot ab vnitate illius generis relicte fuerint: toties curta pyramis naſcetur.

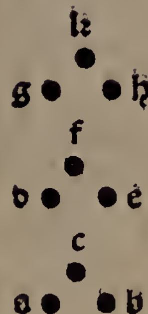
¶ Hec docet tetragonice baſis/pentagone/hexagone/heptagone/octogone/ennagone/decagone: et quotquot angulorꝫ volueris eodẽ ingenio quo ⁊ precedẽs de triãgularibus pyramides formare. nam ſi hoc pacto tetragoni ab aliquo dato ad vnitatẽ vſqꝫ ſuppoſiti aptentur: oĩa latera (que ꝑ correlariũ ꝑme huius erũt triãgulares numeri ab vnitate cõtinue ſumpti ſint) in vnũ verticẽ concurrẽt totãqꝫ pyramidẽ ꝯſtituent cuiꝰ baſis erit datus tetragonꝰ ſup cuius latera ſunt erecta latera pyramidis in vnũ cacumen conueniẽtia imo oẽs tetragonice pyramides infra illã eſſent formate. ⁊ ita ſi pẽtagoni hexagoni et ſequẽtes hunc in modũ aptẽtur pẽtagonas/hexagonas/octogonas/ẽnagonas: reliquaſqꝫ oẽs formabis pyramidas Scda pars ſtatĩ nota eſt nã ſi detur quotuſcũqꝫ triãgularis vt ſextus ab vnitate cui ſupponãtur mõ ãtedicto ꝑ ordinẽ quĩtus quartꝰ tertius et ſcdus. at deſit vnitas ꝙuis latera illiꝰ ſimul tendãt non tñ conueniũt: ideo figura illa ꝑ diffinitionẽ erit curta pyramis. ꝙ ſi quĩtus quartus ⁊ tertius ſoli ſuprapoſiti in altũ fuiſſent: defuiſſẽtqꝫ duo ſcdus et vnitas hec biſcurta pyramis diceretur ꝙ ſi omiſſi fuiſſent tres diceretur tricurta. et ita quotquot omitterẽtur toties curta diceretur. et ita de curtis pyramidibus que a quadratis pentagonis hexagonis ⁊ ſequẽtibus figuris naſcũtur ſentiendũ eſt. eſt itaqꝫ notum quod ꝓponitur.

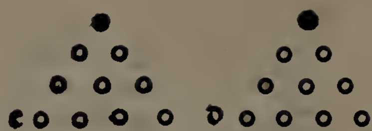
29 ¶ Si due pyramides quarum baſes ſunt triãgulares proximi coniungãtur: efficietur pyramis cuius baſis erit tetragonus maiori triãgularium equilaterus.

¶ Nã quelibet earũ erit cõpoſita ex oĩbus triãgularibus ꝙ ſunt a triãgulari baſis ſue vſqꝫ ad vnitatẽ at baſis minoris ꝓximus eſt triãgularis poſt baſem maioris. cõiuncti igitur ſimul ꝑ quintã huiꝰ faciũt tetragonũ et ſcdus vnius ⁊ ſcdus alteriꝰ ſequentẽ tetragonũ. et ſic eouſqꝫ donec extrema vnitas minoris cũ penultimo alterius triãgulari primũ poſt vnitatẽ cõficiat tetragonũ. vnitas igitur ſi apponatur oẽs ad ipſãuſqꝫ tetragonos ſuprapoſitos habebimꝰ ab illo ſcꝫ tetragono cuiꝰ latus eſt equale lateri triãgularis baſis maioris pyramidis. at per ꝑmiſſam ex oĩbꝰ ab vnitate tetragonis cõponitur pyramis cuius baſis eſt quadrãgula ⁊ coniunctorũ vltimus tetragonus. effectũ eſt igitur qd ꝓponebatur.

30 ¶ Si quotlibet triãgulares equales in altũ cõponãtur: fiet ex eis numerus ſerratilis.

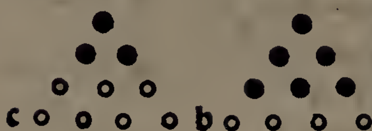
¶ Nam qr equales erunt poterũt directe cõtinue in altum latera vnius ſuper latera alterius aptari applicariqꝫ: vt latus d e ſupra latus a b ⁊ d f: et f e ſupra latera a c ⁊ c b: et latus g h ſupra latus d e: et latera g lz et lz h ſupra latera d f et f e: ⁊ ita de conſequentibus vſqꝫ ad vltimũ. et quoniã omniũ latera ſunt equalia: erit vt ſupra poſita directe latera que ſupremũ locum optinent extremis equalia ſint et equidiſtãtia. patet itaqꝫ per diffinitionẽ factum eſſe ſerratilẽ quod ꝓponebatur.





¶ Omnis serratilis pyramide sue basis vno altior: addit super eam: pyramidē cuius basis tetragona est: basi alterius equilatera. 31

¶ Nam dēpta triangula pyramide: ita videlicet vt basis in basi tollatur et de secūdo equalium triangulorū secundus pyramidis detrahat̄ et de tertio tertius: sicq̄ deinceps. q̄ serratilis vno altior pyramide sue basis positus est de penultimo triāgulariū equaliū auferet̄ suprema vnitas atq̄ pyramidis vertex: sicq̄ totus vltimus triāgularis serratilis integer relinq̄tur. at q̄ in basi serratilis fuit ablata basis triāgule pyramidis. ideo per secundā huius: secundi triāgularis relictū est latus et in omnibus superioribꝰ similiter qui q̄m tot sunt quot in illo latere vnitates: constat latus ipsum cū sequētium lateribus summā quadrati pficere. preterea q̄ tertij triangularis serratilis remanet latus suū et minor sequēs et in sequētibus similiter: erit vt illa sint sequētis quadrati latera. et hoc pacto ad vnitatēvsq̄ quadratorū numerus excrescit. erit ergo vt in supremo triangulari residua sit vnitas et que est primus tetragonus. ergo per vicesiimāoctauam huius constat relictam esse tetragonā pyramidē. et q̄ latus basis eiusdē est latus triangulariū equalium et latus basis piramidis triāgule ablate idē: constat pyramidē relictam esse pyramidi basis serratilisequilaterā atq̄ ipsum serratilē eam super pyramidem basis sue addere: quod est propositum.





¶ Omnis serratilis pyramide sue basis duobus altior: eidē triplus esse probat̄ 32

¶ Substraho enī ab ipso serratili extremū triangulariū relinquet̄q̄ serratilis vno altior piramide: q̄ per precedentē in duas secabilis est piramidas: quarū vna est triangula pyramis basis serratilis et altera tetragonica cuius basis tetragona est et basi alterius eq̄latera. sed et hec eadē tetragonica pyramis pervicesimānonam huius in duas rursus secabilis est triāgulas pyramides: quarū vna triāgule priori est equalis et altera ea minor q̄ntum est basis triāgule prioris. addito igitur prius dēpto triāgulari eidē basi prioris triāgule pyramidis equali ad minorē: illa fiet alteri equalis. sic fiēt tres equales triangule pyramides totum serratilem constituentes. constat itaq̄ totum huiusmodi serratilem pyramidi sue basis esse triplum: quod est propositum.

¶ Latere basis triāgularis dato: triāgule pyramidis sup eam c̄stitute summā repire. 33

¶ Reperiatur triāgularis lateris dati per sextā huius: in quē latus ipsum ducatur et habebimus serratilē eque altū pyramidi cui adiice duos equales triāgulares pueniet̄q̄ serratilis duobꝰ pyramide sue basis altior cuius tertiā partem accipe et p precedētē habes pyramidis sup latus cōstitute summā atq̄ q̄d ex triāgulari lateris dati vna cū oībus suis inferioribꝰ triāgularibꝰ coaceruat̄: q̄d ē ppositū.

¶ Pyramidis totius summā reperire: cuius basis tetragona: eiusdemq̄ basis latus datum fuerit. 34

¶ Ut precedēs docuit dato triāgularis latere q̄d ex ipso et oībus sub eo cōtentis coaceruat̄ inuenire ita quoq̄ et p̄sens nos instruit dato tetragoni latere q̄d ex ipso et omnibus sub eo c̄tentis tetragonis coaceruat̄ reperire. hoc enī est tetragone pyramidis summā reperire quod ostēditur. nam dato latere quero per sextā huius eius triāgularem in quē vt in precedēti factū est duco latus propositū et proueniet serratilis eque atq̄ eius pyramis altus cui addo vnū consimiliū triāgulorum et pueniet serratilis vno pyramide sue basis altior. detracta igitur p precedentē inuenta basis pyramide: per tricesimā primā huius relinquetur tetragona pyramis cuiusquidē basis tetragona est atq̄ triangulari equilatera que scʒ est summa petita et propositum.

¶ Si duo serratiles quorum bases triāgulares proximi existant: et quorum altitudo vna: et lateri maioris equa fuerit: coniungantur: efficietur cubus. 35

¶ Nam bases in ipsis equaliter scʒ secūdum numerū lateris maioris serratilis sunt multiplicate et basisvnius et basis alterius cōiuncte per quintā huius tetragonū efficiūt cuius latus lateri maioris est equale et secūdus triāgulusvnius secundo alterius cōiunctus per eandē tetragonū consimilē. et ita cōsequenter vt tot tetragoni equales superponātur sibiq̄ inuicē aptētur quot in latere sunt vnitates at cum ex illis figura sit constituta basim quadrangulā habens in longum latum et altum equaliter distensa per diffinitionem concluditur esse cubus.

¶ Si cuilibet cubo adiungatur basis sua et triāgularis basi sue equilaterus: efficietur triplus sue pyramidi. 36

¶ Sumo duos triāgulares proximos quorū maior sit equilaterus tetragono cubi assignati et constituo per tricesimā huius super eos serratiles quorū altitudo sit equalis lateri basis maioris qui duo serratiles cōiuncti per p̄cedentē equabūtur cubo assignato. et q̄ maior illorū serratiliū est eq̄ altus sue pyramidi: duplo ergo sue basis sibi addito per tricesimāsecundā huiꝰ fiet pyramidi sue basis triplus. at q̄ alter serratilis est alteri eque altus: erit vno altior sua pyramide. basi igitur ipsi semel addita fiet eidē sue pyramidi triplus. at basis sua cum basi alterius per quintā huius faciūt tetragonū cubi: quare si predicto cubo addatur basis sua cū basi maioris serratilis que est triāgularis basi sue equilaterus: efficietur numerus piramidi sue triplus: q̄d erat demonstrandū. ¶ Sunt preterea collūne que vt serratiles per tricesimā huius facile formabūtur et quarū summa ducendo basim in costā cognoscitur que q̄ facilia sūt autor omisit. sunt etiā numeri circulares qui proprij semp principij reuersione formātur. et eadē ratione sphere sphericiq̄ cubi vt vigintiquinq̄ et trigintasex qui a radicibus

quinaria scȝ ⁊ senaria nascũtur numeri circulares dicũtur ⁊ centum vigintiquinq;:siłr ducēta decem ⁊ sex sphere sphericiq; cubi noīanẜ qui a radicibus quinaria ⁊ senaria in suos circulares quadratos ductis ꝓcreãtur. Sed quia hi numeri a paucis ⁊ ꝯstitutis numeris nascũtur quinario scȝ et senario ⁊ demõstrationis difficultatem non requirant:aut siłem cũ ceteris quadratis ⁊ cubis normam obseruent:hoꝝ ampliorem determiatiõem autor non ab re omisisse videtur.

¶ Octaui elementorum Arithmetices Jordani finis.

Equalitas est inequalitatis pricipium. Inequalitatis quinq; sunt species: aut eni maior terminorum ꝯtinet minorem aliquotics vt nichil supfluat:et dicĩẜ multiplex ꝓportio. aut semel tm̃ ⁊ eius aliquã partem: et supparticularis appellatur. aut semel ⁊ eius aliquot partes:et dicĩẜ suppartiens. aut pluries ⁊ eius aliquã partem:et multiplex supparticularis vocatur. aut pluries ⁊ eius aliquot partes:et multiplex suppartiẽs noiatur. ¶ Minoris quoq; ad maiorẽ habitudo totidem species cõtinet:que inter se sicut priores fm denoiantium diuersitatem variãtur. ¶ Scdm partem aliqd multiplicare:est totam illius sumere partem: quota fuerit que multiplicat. ¶ Quodcunq; aliud multiplicet:illud ꝓduci dicimus qd ita se habet ad multiplicatum:sicut multiplicans ad vnũ. diuidi dicĩẜ aliqd per aliud:cum illud sumitur diuidens qd per idem multiplicatum summam diuisi restituat.

1 ¶ Inequalium numerorum maioris ad minorem ea est:que partis ab ipo minore denominate:ad partem a maiore dictam ꝓportio.

¶ Sint a ⁊ b numeri inequales:a maior/et b minor. sintq; d e partes ab ipis denoiate d scȝ denoiata ab b et e denomiata ab a. dico eãdem ꝓportiõem eẽ a ad b et d ad e. pono eni vnũ inter a et b qd sit c:⁊ vnum inter d et e qd sit f. et qa que ꝓportio a ad vnum ea ẽ vnius ad partem ab a denoiatam:at ea est ꝓportio f ad e. et que ꝓportio c vnius ad b:ea est partis denoiate ab b ad vnum. at ea est d ad f. igitur per vicesimãscdam secũdi ⁊ equã proportiõalitatem indirectam que ꝓportio a ad b ea est d ad e:ptis scȝ a minore denoiate/ad partem a maiore denoiatam. quod est propositum.

a 4 · c 1 · b 2
d 2/1 · f 1 · e 4/1

2 ¶ Partes quotlibet in partes equales redigere.

¶ Sint partes date a/b c:et numeri eas denoiantes d/e f:et ꝓpositũ siłr reducere a b c in ptes eiusdẽ denoiatiõis atq; equales. sumo per vicesimãquitam tertij mĩmum nũerum quẽ numerant d e f:q̃ sit g numerẽtq; ipm fm h/k l:et sit m pars denoiata ab g. erit eni per precedentem vt g ad d:ita a ad m. at d nũerat g fm h:igitur ⁊ m numerabit a fm h. et per candem vt g ad e:ita b ad m. e aũt numerat g fm k igitur ⁊ m numerabit b fm k. itidem ⁊ m numerabit c fm l per idem. erũtq; reducte partes ille in ptes equales scȝ a in partes dictas ab g fm h/et b in easdem fm k/et c in easdeȝ partes ab g dictas scdm l. at si a b c singule non sint pars: sed b sit partes ⁊ c partes idem eueniet. erũtq; partes dicte ab g fm h k l. ⁊ ducẽdo a in h ꝓueniũt partes a dicte ab g. et ducẽdo b in k ꝓueniũt partes b ab eodẽ nũero dicte et ducendo c in l ꝓueniũt reducte partes c dicte ab g. quas si vna colligis collectum ostendit summam partium a b c ad eandem denoiationem scȝ g reductaꝝ.

g 12
d 2/1 · e 3/1 · f 4/1
a · b · c
h 6 · k 4 · l 3
a 1 · e 2 · f 3
m 1

3 ¶ Numerum cum parte vel partibus datum:in partes similes reducere.

¶ Sit a numerus:⁊ b/c d partes date:et iubeaẜ primo a ⁊ b in partes siłes reducere. duco numerum denoiantеȝ partem b in a. et qa b est pars vnius ⁊ vnum pars totius a:denoiata ab a:ergo ꝑ vicesimã tertiam p̃mi b est pars a denoiata a nũero qui fit ex ductu denoiantiũ in se scȝ denoiantis b:in a denominãtem vnius:partis scȝ a. duco ergo b in a ⁊ ꝓduceẜ numerus denoians illam partem:⁊ ꝑ diffinitionem multiplicans a fm illam partem. capio ergo siłes illi parti fm ꝓductum numerum qui erit oẽs siłes partes a cui addo partem b ⁊ sit aggregatus e factũq; apparebit propositum. Q; si iubeamur a numerum et partes b c ⁊ d in ꝯsiłes partes reducere:reduco p̃mo ꝑ precedẽtem b c ⁊ a in ꝯsiłes ptes. deinde vt prius duco numerum denoiantem in a et ꝓueniet nũerus denoians illam partem quem vt prius compleo ⁊ cui addo nũerum partium ad eandem denoiationem reductaꝝ:et efficiẜ ꝓpositum.

e 2 · 8 / 9 · 1
a 4
b 2
c 1/3
d 1/4/1

4 ¶ Quod fit ex ductu duaꝝ partium vnius in aliam:ẽ pars denoiata ab numero qui fit ex ductu duoꝝ numeroꝝ vnius in alium illas partes denoiantium.

¶ Sint a ⁊ b due partes:⁊ nũeri eas denoiantes sint c ⁊ d:⁊ ex c in d fiat e:et pars denoiata ab e sit f. dico f esse partem ꝓductam ex a in b. erit eni ex diffinitiõe vt vnum ad c:ita d ad e. sed ⁊ vt vnum ad c: ita a ad vnum. ergo vt a ad vnum:ita d ad e. sed ꝑ primam huius vt d ad e:ita f ad b. at ꝑ diffinitiõem vt a ad vnum:ita ꝓductum ex a in b ad b. at f ita se habet ad b. est igitur f ꝑ diffinitiõem qd fit ex a in b. quod est propositum.

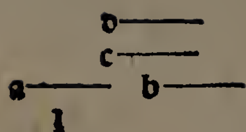
e 12
c 3 · d 4
a 1 · b 1
f 1

5 ¶ Si plura quotlibet in aliqd ducanẜ:tm̃ ꝓduciẜ q̃tum si qdlibet eoꝝ ducaẜ in illd.

¶ Hec decime primi siłis est sed cõior. sit nũerus a c collectus ex a b c q̃ multiplicet d siue d sit nũerus siue ꝑs vel ptes ⁊ ꝓueniat e. et ex ductu a in d fiat f/et b in d fiat g/et c in d fiat h. dico f g h simul tm̃ eẽ q̃tum e. nam ex diffinitiõe erit vnum ad a/et ad b et ad c:tanq̃ d ad f/et ad g ⁊ ad h. ergo ꝑ vicesimam tertiam secũdi vnum ad a b ⁊ c:sicut d ad f g ⁊ h. at ꝑ diffinitionem sicut vnum ad a b ⁊ c:ita d ad e. sunt igitur f g ⁊ h simul q̃tum e. quod est propositum

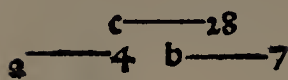
15
a 4 · b 5 · c 6
d 7
f 28 · g 55 · h 42
e 105

¶Si duoꝝ quodlibet in reliquum ducatur: que ꝓducūtur equa esse necesse est. 6



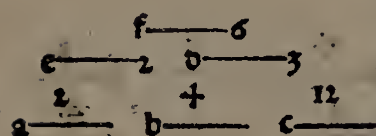
¶Hec fere est octaua p̄mi sed paulo cōior ꝙ etiā ad minutias / fractionesq̄ se extendat. vt si a nūerus pars vel partes multiplicet b numerum ptem vel ptes et ꝓueniat c: et b multiplicet a et proueniat d. dico c ⁊ d eē equalia. nā ex diffinitiōe erit c ad b sicut a ad vnū: ergo ꝑmutatim c ad a sicut b ad vnum. ergo ex ꝯuersiōe diffinitiōis b in a ꝓducit c. est igit̄ d qd̄ fit ex b in a equū c. quod erat demōstrandū.

¶Producti ex duobus erit ad vtrūq̄ ꝓportio a reliquo denoiata. ꝙ si eius ad alterū fuerit ꝓportio a reliquo dicta: idem ex ductu alterius in alterum ꝓducetur. 7



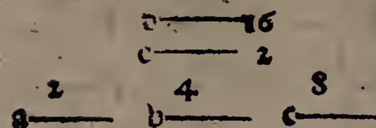
¶Ex duobus nūeris a in b ꝓducatur c: dico proportiōem c ad a eē denoiatam ab b: et proportiōem c ad b esse denoiatam ab a. nam ꝑ p̄cedentē ex a in b fit c: et ex b in a fit etiā c. et ꝑ diffinitiōem ea ē ꝓportio b ad vnū: que c ad a. at ꝓportio b ad vnū denoiatur ab b: igitur ⁊ ꝓportio c ad a denoiābitur ab b. et ꝯsilit̄ qꝛ ex a in b fit c: ꝑ diffinitiōem que ꝓportio a ad vnū: ea est c ad b. at ꝓportio a ad vnū denoiatur ab a: igitur ꝓportio c ad b denoiābitur ab a. quod est propositum. Cōuersum ꝯsimili ꝯuerso modo ꝓbabit̄. Et ex hac ad quēlibet numerum q̄tūlibet multiplicem demōstrare possumus. capiēdo totum numerum ab vnitate quotus numerus multiplex ad nūerū sit petitus ⁊ ducēdo numerum ab vnitate totum acceptū in nūerum assignatū. et per presentem totus ꝓueniet ad numerū assignatū multiplex.

¶Ōis ꝓportio ex duabus cōposita: ex ductu vnius eaꝝ in reliquam ꝓducitur. 8



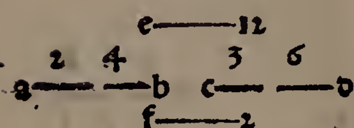
¶Ducere ꝓportiōem aliquā in aliam: est ducere denoiatiōnē vnius in denoiatiōem alterius. hic duas ꝓportiōes aliquā ꝯpositā ꝓducē: est denoiatiōes illaꝝ duaꝝ ꝓportionū denoiatiōem ꝯposite ꝓducē. Esto ḡ ꝓportio c ad a ꝯposita ex ꝓportiōib⁹ c ad b ⁊ b ad a. dico ꝓportiōeȝ c ad a ꝓduci ex ductu ꝓportiōis c ad b: in ꝓportiōeȝ b ad a. capio eni d denoiantē ꝓportiōis c ad b ⁊ e denoiantē ꝓportiōis b ad a et f denoiantē toti⁹ c ad a. qꝛ eni ꝓportio c ad a denoiat̄ ab f: ergo ꝑ scd̄am ptem p̄cedēt[is] f in a facit c et ꝑ eādē e in a facit b. ergo ꝑ septimam scd̄i sicut c ad b ita f ad e: sed d est denoians ꝓportiōem c ad b per hypothesim. ergo ꝑ scd̄am partem p̄cedētis d in e ꝓducit f denoians scȝ vnius illaꝝ proportionū in denoiatiōeȝ alterius ꝓducit totius denoiatiōem. quod est propositum.

¶Trium ꝯtinue proportiōalium qd̄ fit ex primo in vltim equū est ei: quod ex medio in se ducto ꝓducitur. 9



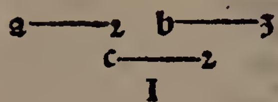
¶Hec fere in vicesimasexta secūdi mōstrata est: nisi ꝙ hec paulo latior est / atq̄ hic alio demōstrandi modo innitimur. Sint ergo a b c tria ꝯtinue proportiōalia / atq̄ ex b in se fiat d: et sit e denoians ꝓportionis b ad a. dico equū esse qd̄ fit ex a in c: ⁊ b in se. nā qꝛ e denoiat proportiōem b ad a: etiā denoiābit proportionem c ad b. ergo ꝑ scd̄am ptem penultime e in b ꝓducit c. ergo ꝑ octauam secūdi q̄ ꝓportio d ad c ea est b ad e: sed ⁊ ꝑ eādē scd̄am ptē penultime a in e facit b. ergo per primam partem eiusdē: a denoiat ꝓportiōem b ad e: quare ⁊ proportionem d ad c. ergo a in c per eiusdē scd̄am ptem ꝓducit d. constat igitur quod fit ex b in se: equū esse ei qd̄ fit ex a in c. et propositum.

¶Si primum ad scd̄m sicut tertiū ad quartū: quod fit ex primo in quartum: equale est ei qd̄ ex secundo in tertium ꝓducitur. 10



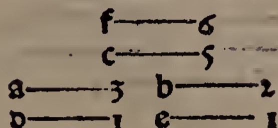
¶Hec sil'e qd̄ vicesimaquita secūdi ꝓponit. Sit ergo proportio a ad b vt c ad d: et ex b in c fiat e. dico e tm̄ esse q̄tum qd̄ fit ex a in d. sit eni f denoians proportiōem b ad a: denoiābit etiā ꝓportiōem d ad c. ergo ꝑ scd̄aȝ partem septime huius f in c ꝯstituit d. ergo ꝑ octauam scd̄i e ad b sicut d ad f. sed ⁊ f in a per eādem scd̄am partem septime huius facit b: ergo ꝑ primā ptē eiusdē a denoiat ꝓportiōem b ad f. quare ⁊ proportiōem e ad d. per scd̄am ergo partem eiusdem a in d facit e. qd̄ est ꝓpositum.

¶Si scd̄m alteꝝ duorū nūerorum sumātur partes a reliquo dicte: erit ab eo quod ex eis ꝯponit̄ proportio eiusdem ad reliquum denoiata. vnde manifestum est ꝙ oēs ille se habent ad vnum sicut reliquus ad denoiantem. 11



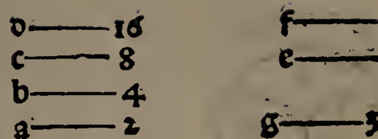
¶Sint a ⁊ b duo nūeri: sumāturq̄ ꝓm a ptes denoiate ab b: sitq̄ c cōpositum ex ipis. dico ꝓportiōem a ad b denoiari ab c. nam qꝛ tot sunt in vno partes sil'es: quot sunt vnitates in b. erit vt sicut a ad b: ita partes ille ad vnum. sed vnū in illis ꝓducit ipm c: ergo ꝑ septimā huius proportio c ad vnum denoiat̄ ab c composito ex ipis partibus. ergo ⁊ proportio a ad b ab eodem denoiatur. Correlarium ex modo demōstrandi notum est. ꝓponebat eni hinc esse notū sicut c ad vnū: ita a ad denoiantem b qui positus erat denoiare c. et hoc fuit ostensum.

¶Que a ꝯtra se primis partes denoiantur: vnam non cōstituūt. 12



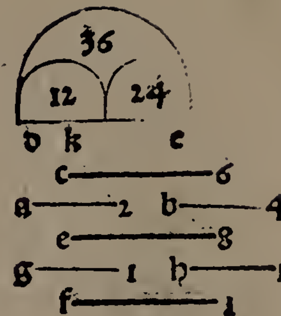
¶Sint a ⁊ b numeri ꝯtra se p̄mi: et aggregatus ex ipis sit c qui ꝑ nonam tertij est primus ad vtrūq̄ a ⁊ b: et sit d pars denoiata ab a / et e pars denoiata ab b. dico d et e nō ꝯstituere partem vnā. duco eni a in b: et ꝓueniat f qui ꝑ vicesimāquitam tertij est minimus quē nūerant a b: qui ⁊ idem f per decimam eiusdem tertij est primus ad c. et ꝑ scd̄am huius: d est reducte ptes denomiate ab f ⁊ sumpte ꝓm b. et e reducte partes denoiate ab f et sumpte ꝓm a. quare d e simul sunt ptes denoiate ab f: et sumpte ꝓm c. quare per correlarium p̄cedentis d e simul ad vnū: sicut c ad f. at c nō est ps f: cū ipsi mōstratus sit esse primus: igitur neq̄ d e pars vnius. non ꝯstituūt igitur d e partem vnam. qd̄ est propositum.

¶Si a quotlibet nūeris numeroꝝ ab vnitate proportionalium partes denominent̄: vnam ex eis componi est impossibile. 13



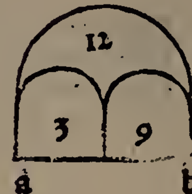
Sint a b c d numeri ab vnitate ꝯtinue proportionales: et a quotlibet eorum vt c d denominentur e et f scȝ e ab c / et f ab d. dico e ⁊ f non ꝯstituere partem vnā. et sit g aggregatū ex a ⁊ vnitate. quia enī c numerat d manifestum est per vicesimāquintam tertij d eē minimum numerū quē nūerant c d. at per vicesimāquītam secūdi c numerat d scdm a: et d seipm scdm vnitatem. et per scdam huius e est reducte ptes denoīate ab d et sumpte scdm a. et f est pars denoīata ab d sumpta scdm vnitatem. igitur e f simul est ptes denoīate ab d sumpte scdm g. quare per correlariū penultime huius e f simul ad vnū vt g ad d. sed g non est pars d. nam si g sit numerus primus ⁊ numeraret d: per vicesimāseptimam quarti etiā numerabit a totū scȝ suam partem. qd est impossibile. et si g sit compositus: ergo per scdam tertij ab aliquo pmo nūerabitur qui per vicesimātertiam primi nūerabit d. quare per vicesimāseptimam quarti numerabit a: ⁊ etiā nūerat totum g. ergo per duodecimam pmi numerabit residuū: numerus scȝ vnitatē. qd est impossibile. non est igitur g pars d: quare neqȝ e f pars vnius. non igitur e f ꝯstituūt partem vnam. quod est propositum.

14 Partes a duobus nūeris dicte sic se hn̄t ad partem a nūero ex eis ꝯposito denoīatā: sicut quadratum ꝯpositi ad numerum qui ex ductu vnius in alterum producitur.



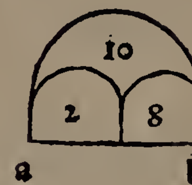
Sint a ⁊ b duo numeri: et c ex ipis ꝯpositus: sitqȝ d quadratus c. et ducatur a in b ⁊ fiat e. et sit f ps denomiata ab c. et sit rursus g ps denoīata ab a: et h pars denoīata ab b. dico vt d ad e: ita g ⁊ h ad f. duco enī c in a et fiat k / ⁊ c in b ⁊ fiat l. erūtqȝ per nonam primi k ⁊ l siēt tanq̄ d. intelligo ergo sex nūeros e / k / f / h / l / g quorum dico e ad k primū ad scdm: sicut f ad h tertiū ad quartū. Itē e ad l pmū ad quintum sicut f ad g tertiū ad sextum. nam per septimā secūdi e ad k tanq̄ b ad c. sed per primam huius b ad c tanq̄ f ad h. est igitur e ad k tanq̄ f ad h. Item per eādem septimam secūdi e ad l tanq̄ a ad c. sed per primam huius a ad c tanq̄ f ad g. est igitur e ad l tanq̄ f ad g. ergo per vicesimātertiam secūdi e primus ad k et l simul scdm scȝ ⁊ quintum tanq̄ f tertius ad g ⁊ h simul quartum ⁊ sextum. at k ⁊ l simul sunt d: igitur d ad e tanq̄ g ⁊ h simul ad f. quod est propositum.

15 Si duo numeri componātur fueritqȝ compositi ad alterum multiplex proportio: erit reliquus alteri equalis aut multiplex.



Sit numerus a b cōpositus ex duobus a ⁊ b: sitqȝ compositus a b multiplex ad a. dico b eē equalē a vel eidem multiplicem. nam cū a b sit multiplex ad a: ipē a numerat totū a b ⁊ seipm etiā detractum numerat. ergo per duodecimam primi numerat b residuum. quia si semel a numeret b: ipē a erit equalis b. at si a multoties numeret b: erit per diffinitiōem b multiplex ad a. quod est propositum.

16 Si totius ad alterum fuerit proportio superparticularis: erit illius ad reliquum similis denominationis proportio multiplex.

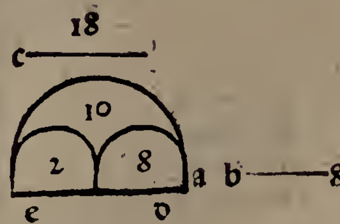


Proportio tota superparticularis aut tota multiplex dicitur quotus fuerit superparticularis aut multiplex: vt pmus superparticularis est sesqualter ⁊ sequūtur per ordinem sesquitertius / sesquiquartus. ⁊ ita deinceps scdm numerorum seriem. et primus multiplex est duplus: ⁊ sequūtur per ordinem triplus / quadruplus / quīcuplus: sicqȝ deinceps scdm seriem numerorum. sit a b totus numerus ꝯstitutus ex a ⁊ b: sitqȝ a b superparticularis ad b. dico b totū esse multiplicem similisqȝ denoīatiōis ad a. nam quia compositus a b superparticularis ad b addit super b numerum a: ergo per diffinitionem a est ps aliqua b. at quota fuerit a pars b totus est a b superparticularis ad b. et quota pars a fuerit b totus erit b multiplex ad a. per diffinitiones igitur quota fuerit proportio superparticularis a b ad b: tota erit b ad a proportio multiplex: quod est propositum.

17 Si alterius ad alterum fuerit proportio multiplex: erit totius ad ipsum proportio superparticularis.

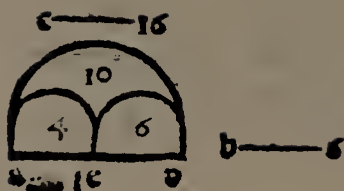
Hec est ꝯuersa pcedētis. vt sit b ad a proportio multiplex: dico cōpositi a b ad b totam eē proportiōem superparticularem. nam quia b est multiplex ad a: erit a per diffinitiōem aliqua ps b. at totā ptem b addit a b super b. nam addit a. igitur quota fuerit b ad a proportio multiplex: tota erit a b ad b proportio superparticularis. quod intenditur.

18 Si maioris ad minus fuerit superparticularis vel multiplex superparticularis proportio: ꝯpositi ex eis ad minorē multiplex superparticularis: ad maiorē vero superpartiēs erit proportio.



Sit a maior numerus / ⁊ b minor: ⁊ sit a ad b proportio superparticularis: et sit c cōpositus ex a et b. dico c ad b proportiōem esse multiplicem superparticularem: et c ad a proportiōem eē superpartientem. capio enī ab a maiore numero ptem equalem b que sit d: ⁊ residuū sit e. quia enī a est superparticularis ad b: manifestum est a addere super b q̄ntum est e: et e esse ptem b. et quia c est q̄ntum e d et b: et d b duplum est ad b cui superaddit c q̄ntum ē e. igitur c addit super b duplū ad b et q̄ntum est e pars eius aliqua. ꝯtinet igitur c bis b ⁊ totam eius partem quota est e. est igitur per diffinitiōem c ad b multiplex superparticularis. qd est primum. Sed ⁊ c ad a eē superpartiētem ostēditur. nā cum b sit minor a ⁊ nō sit pars a / alioquin a ad b eēt proportio multiplex. qd est ꝯtra hypothesim. ergo per primam pmi b est partes a. sed c addit super a q̄ntum est b. erit igitur c ꝯtinēs a ⁊ partes eius: ad a proportio superpartiens. quod est propositum. Et si maioris ad minorem fuerit proportio multiplex superparticularis: ꝯpositi ad minorem eē multiplicē superparticularem ⁊ ad maiorem esse superpartientem eadem demonstratio est accepto maiore numero multiplice superparticulari ad minorem.

19 Si maioris ad minorem fuerit proportio superpartiēs vel multiplex superpartiens: erit cōpositi ad maiorem superpartiens: ad minorem vero multiplex superpartiens proportio.



¶Sit a ad b suppartiens:⁊ ꝯpositus ex a ⁊ b sit c.dico c ad a esse suppartientē:⁊ c ad b eē multiplicē suppartientem.Sumo eni ex maiore a:numerum d equalem b:sitqꝫ e residuus qui qꝛ a est suppartiēs ad b:ꝑ diffinitiōem erit partes b.et qa c est tanq̄ e d ⁊ b:et d.b duplum est ad b:addet c q̄tum est e sup duplum b.at e mōstratus est esse partes b:ergo c ꝯtinet b aliquoties ⁊ ꝑtes eius. est igitur ꝑ diffiniti onem c ad b multiplex suppartiens.qd est p̄ntis theorematis scdm.Primum aūt ꝙ c sit suppartiēs ad a patet.nam qa e est partes b erit vt b sit partes a:alioquin a eēt multiplex ad b.qd est ꝯtra hypothesim.at c addit sup a q̄tum est b.est igitur c ad a suppartiens.quod est propositum.

¶Ois ꝯpositi ad maiorem ꝯponentiū supparticularis vł suppartiēs:ad minorem ꝟo multiplex/multiplex supparticularis vel multiplex suppartiēs ꝓportio reperitur. 20

¶Primum ꝙ ꝯpositus ad maiorem ꝯponentiū sit supparticularis aut suppartiēs patet.nā ꝯpositus addit super maiorem ꝯponētium q̄tum est minor qui per primam p̄mi erit pars vel partes maioris si pars maioris per diffinitionem ꝯpositus ad maiorem ꝯponētium ēt supparticularis.si partes erit suppartiens.multiplex aūt ad maiorem nunq̄ eē potest.Scdm ꝙ ꝯpositus ad minorem sit multiplex/multiplex supparticularis aut multiplex suppartiens ostenditur.nā maioris ꝯponentiū ad minorem ꝓportio:a diuisione aut est multiplex aut supparticularis aut suppartiens aut multiplex supparticularis aut multiplex suppartiens.Si aūt maioris ꝯponentium ad minorem proportio sit multiplex:cū minor maiorem numeret ⁊ etiam seip̄m ipse aliq̄tres sumptus nūerabit totū.quare tūc ꝯpositus erit multiplex ad ip̄m.et si maior ad miorem sit supparticularis aut multiplex supparticularis ꝑ decimā octauam huius compositus ad minorem est multiplex supparticularis.et si maior ad minorem sit superpartiēs aut multiplex suppartiēs:per decimānonam huius erit cōpositus ad minorem multiplex superpartiēs.est igitur totum propositum notum.

¶Quecūqꝫ maioris ad miorem ꝓportio multiplici addatur: tota erit aut multiplex/aut multiplex supparticularis/aut multiplex suppartiens. 21

¶Sit quecūqꝫ ꝓportio multiplex data:et alia quecūqꝫ maioris ad minus:que ꝑ sextam quinti ꝯtineātur in mīmis terminis a/b/c.ita vt a ad b sit data ꝓportio multiplex:et b ad c sit altera maioris hitudinis.dico totā ꝓportiōem a ad c esse multiplicem aut multiplicem supparticularem aut multiplicē suppartiētem.nam qꝛ a est maior b/⁊ b maior c/et a ad b ꝓportio est multiplex:per nonam scdi ꝓportio a ad c maior est ꝓportiōe a ad b.addit igiꝰ ꝓportio a ad c sup ꝓportiōem a ad b vel nūerum.sicqꝫ tota erit multiplex vel partem aut numerum cū parte:et sic erit multiplex supparticularis:vł partes aut numerum cū partibus et sic erit multiplex suppartiens.est itaqꝫ notum quod dicitur.

¶Si due multiplices coniungantur: composita erit multiplex. 22

¶Nam vtraqꝫ a nūero denoiaꝰ:quoꝝ si alter in alterum ducatur ꝓueniet nūerus a quo ꝑ octauam huius denoīatur composita:quare erit multiplex.quod est propositum.

¶Data multiplice supparticularem inuenire:que cū illa multiplicem cōstituat. vnde perspicuum est ex qualibet multiplice cū tota supparticulari: multiplicē vno maioris denoīationis ꝓuenire. 23

¶Multiplices ⁊ supparticulares tote dicūtur:quaꝝ denoīatio multiplicis ⁊ denoīatio partis super particularis ab eodem nūero sumitur.vt dupla ⁊ sesqualꝰa.dupla eni a duobus ⁊ sesqualꝰa similiꝰ sumitur.nam sesqualꝰa ꝯtinet totum ⁊ vnam scdaꝫ.tripla ⁊ sesquiꝰtia/quadrupla/⁊ sesquiquarta:sicqꝫ deinceps.Sit a quecūqꝫ multiplex ꝓportio data ⁊ b numerus eam denoīans: et sit c ꝓportio supparticularis cuius numerus d denoīet partem.sitqꝫ d equalis b.et sit e totalis denoīatio proportiōis sup particularis c:quequidē denoīatur ab vno ⁊ numero partis.et qꝛ vnū in b facit b ⁊ pars denoīata ab b in b facit vnum:ꝫ tota denoīatio e ducta in b facit nūerum vno maiorem b qui sit f:⁊ qui ꝑ octauam huius est denominans ꝓportionis composite ex a ⁊ c.est igitur ꝓportio ꝯposita ex a ⁊ c:a numero scꝫ denoīata:multiplex.et quia numerus denominans compositam est vno maior nūero denoīante ꝓportionem a:ex hoc correlarium et totum propositum notum est.

¶Data supparticulari quotlibet multiplices reperire:quaꝝ quelibet cum illa multiplicem componat. 24

¶Sit eni a data ꝓportio supparticularis ⁊ pars que cum vno eam denominat sit b.capio quotquot multiplices voluero:quaꝝ cuiuslibet numerus denoīans:sit totū ad b/⁊ b pars.et ex mō demōstrādi precedētis a:cū qualibet illaꝝ multiplicium ꝯstituet multiplicem/efficieturqꝫ propositum.

¶Data multiplice quotlibet sumere supparticulares: quaꝝ quelibet cum ea efficiat multiplicem supparticularem. 25

¶Sit a data ꝓportio multiplex ad quā iubemur quotlibet supparticulares inuenire:quaꝝ quelibet cū ea ꝯstituat multiplicem supparticularem.capio b numerum denoīantem ꝓportiōem multiplicem a:et sumo c/d/e/f ⁊ quotquot voluero multiplices ad b:et ꝑtes ab ip̄is denoīatas ꝑ ordinem.et capio supparticulares denoīatas a ꝑtibus c/d/e/f:que sint g/h/k/l quaꝝ quālibet cū data multiplice dico cōstituere multiplicem supparticularem.nam qa g supparticularis sumpta ab c ⁊ sua parte:denoīaꝰ a toto c ⁊ parte denoīata ab c.et b in toto c semel ꝯstituit multiplicē:et in parte c ꝯstituit totam ꝑtem quota ꝑs ip̄e positus sit ad c.ꝯposita ꝫ ex a data multiplice ⁊ g supparticulari sumpta a ꝑte c ꝯstituūt multiplicem supparticularem.et eadem rōne ꝯposita ex a ⁊ h/⁊ ex a ⁊ k/⁊ ex a ⁊ l.qd est propositum.

26 ¶ Quotlibet multiplices inuenire: que cũ data supparticulari multiplicem supparticularem constituant.

¶ Sit a data supparticularis / et b numerus denoĩans eius ptem / et m tota eius denoĩatio cui q̃tlibet multiplices supassumãtur: vt quorũ nũeri denoĩantes sint c / d / e / f: manifestũ est per vicesimãtertiam hui⁹ b in c / et in d / et in e / et in f cõstituere nũerũ multiplicisq̃ denoĩatiões. capio ergo g / h / k / l totidem multiplices vno maioris denoĩationis. et q2 g addit vnũ sup multiplicẽ c: si ergo m totalis denoĩatio ꝓportionis supparticularis ducatur in g ꝓueniet numerus cũ parte denoĩata ab b: quare proportio multiplex supparticularis. vt in presenti figuratiõe ꝓueniret ꝓportio septupla / sesqualtera. et ita de h / et k / et l demonstrabis.

27 ¶ Data multiplice quotlibet supparticulares inuenire quarũ quelibet cũ eadem multiplicem suppartientem componat.

¶ Sit a data multiplex / et b numerus ipam denominãs: sumo quotlibet numeros eo maiores sed nõ multiplices qui sint g h k l et partes ab ipsis denomiate sint c d e f. vt c sit denoĩata ab g / et d ab h: sicq̃ cõsequẽter. dico q̃ cũ b in c / in d / in e / et in f non partem sed partes ꝓducit. nam si ducat̃ b in c et ꝓueniat m ptes denoĩate ab g: p correlariũ vndecime hui⁹ q̃ ꝓportio b ad g: ea ẽ m ad vnũ. sed p hypothesim b est ptes g: igit̃ et m est ptes vnius. et ita si b ducat̃ in d et e et f ꝓuenient ptes. itaq̃ supparticulares ab illis partibus dicte cum data multiplice quelibet cõstituet multiplicem superpartientem.

28 ¶ Sola supparticularium sesqualtera: est q̃ cũ nulla multiplice / multiplicem suppartientem producit.

¶ Nam q2 sesqualtera denoĩatur a scd̃a que est vnius dimidium et dimidiũ in oẽm numerum ductum aut vnum ꝓducit aut numerum aut dimidium addit. nam binarius oẽm nũerũ numerat aut supfluit vnitas ergo denoĩans partis sesqualtere in denoĩantem multiplicis: aut multiplicem ꝓducet / aut multiplicem supparticularem. non itaq̃ cũ multiplice multiplicem suppartientem ꝓducet. at q̃ ois alia supparticularis cũ aliqua multiplice multiplicem suppartientem efficere possit hinc cognoscitur. q2 si sumas numerum denoĩantem multiplicem vno minorem numero denoĩante partem date supparticularis ex precedẽte efficies ꝓpositum. potes et primam partem facile ex modo demõstrandi vicesime sexte huius cognoscere: queadmodum secundam partem ex precedente cognoscis.

29 ¶ Sola multiplicium dupla: cũ nulla suppartiẽte multiplicem efficit proportionem.

¶ Hec ꝓponit duplam cũ nulla suppartiẽte multiplicem cõstituere et oẽm aliã multiplicem cũ aliqua suppartiẽte: posse multiplicem constituere. Primum patet et sit a ꝓportio dupla et b numerus ipam denoĩans: sitq̃ c quecũq̃ ꝓportio suppartiens. dico a cum c non constituere ꝓportiõem multiplicem. Sumo eni partes c q̃ denominẽtur ab d et numerẽtur ab e: et duco b in illas partes et ꝓueniẽt partes sikes et numerate a numero qui sit ex binario: id est b in e. sit ergo nũerus illarũ partium f: quẽ dico nõ esse numerum. nam nõ erit equalis d: q2 e numeraret d. neq̃ ipm numerabit. nam ẽm vnitatem non numerabit: q2 eẽt ei equalis. neq̃ ẽm binarium q2 d et e equarẽtur. neq̃ ẽm maiorem binario: quia d maior est e. cũ ergo b in e denoĩans in partes alterius non cõstituat numerum non ꝓducetur multiplex. Scd̃m patet nam data quacũq̃ alia multiplice vt a: capio b numerum ipam denoĩantem quem facio aliquarũ partium denoĩatorem: et sumo numerum partium vno minorem b qui sit c: sitq̃ d suppartiẽs partium c. dico a et d simul cõstituere multiplicem. nam q2 b est denoĩans a et denoĩans ptiũ d: ideo b in c cõstituet nũerum. denoĩabitur itaq̃ cõposita a numero: quare erit multiplex. qd̃ est ꝓpositum.

30 ¶ Data superpartiente multiplices quotlibet reperire: quarũ quelibet in illam ducta producat multiplicem.

¶ Sit a data suppartiens: et numerus partium sit b: et nũerus illas denoĩans sit c. capio p̃mo multiplicem que denoĩetur ab c que sit d: deinde que denoĩetur ab multiplicib⁹ c quotquot voluero: sintq̃ sui denoĩantes e f g. dico a datam suppartiẽtẽ cũ qualibet multipliciũ d e f et g cõstituere multiplicẽ. nam b in c cõstituet numerum et in e etiã numerum q2 duplum et in f triplũ et g quadruplum acceptis scz per ordinem multiplicibus denoĩantis c. ergo suppartiẽs a cũ qualibet illarũ multipliciũ cõstituit multiplicem. quod est propositum.

31 ¶ Quotlibet suppartientes / quarũ quelibet cum ꝓposita multiplice multiplicem supparticularem constituat / inuenire.

¶ Sit ꝓposita multiplex a cuius numerus denoĩans sit b: sumo quẽlibet nũerum maiorem b qui sit c. et duco b in c et fiat d. et capio e minorem vno d. capio item partes denoĩatas ab e ẽm nũerum c que sint f. qm̃ enim b in c cõstituit d: ideo b in f cõstituet sikes partes ẽm numerum d. at ipe ẽm numerum d sumpte faciũt vnũ et vnã amplius. sit itaq̃ g suppartiens denoĩata a ptibus dictis ab e et sumptis ẽm numerum c q̃ (q2 b in f cõstituit numerum et partem) eadem suppartiẽs cũ a cõstituet supparticularem et quotq̃t voles eadem rõne tibi sumas suppartiẽtes q̃ cũ a cõstituent supparticularem. qd̃ est ꝓpositũ.

32 ¶ Multiplices aliquot sumere: que in datam supparticularem ducte: ꝓcreent multiplices superparticulares.

¶ Sint a et b mimi ẽmini date ꝓportionis suppartiẽtis: qui q2 sunt cõtra se p̃mi quero p vltimã tertij multiplicem a q̃ addat sup multiplicem b vnitatem que sit c: sitq̃ nũerus ẽm quẽ a numerat c nũerus d. sumo vnitatem que sit e. eritq̃ d ad e multiplex denoĩata ab d. at per demõstratũ in principio tertie

10 — 3
25 — 3
40 — 3
Composite.

quinti proportio composita ex a ad b et d ad e est que est inter productum ex d in a: ad productum ex e in b. at e in b facit b: et d in a facit c cõtinens aliquoties b et eius vnã partem. nam positus est c maior vnitate multiplice ad b. igitur composita ex data suppartiente et multiplici d ad e est multiplex supparticularis: quod intenditur. et ita quãlibet aliam inuenias.

Suppartiẽtes quotlibet que cũ data multiplice pficiant suppartiẽtes multiplices: inquirere. 33

b — 5 c — 4
a — 2
e — 10 d — 14
f — 7
g 17 — 10
34 — 10
Composita.

Sit a denoĩans multiplicem: sumo duos numeros c d quorum vnus non nũeret alium: sitque b maior et primus ad a per vltimam tertij: quero multiplicem ad a: qui addat sup multiplicem b nũerum c. sitque huiusmodi multiplex ad a numerus d quẽ numerat a secundum f: et multiplex ad b sit e. dico suppartiẽtem cuius denoĩans partium sit e multiplex b: et nũerus partium sit f esse vnam suppartientum q̃ querũtur. nam a in f partes illas ductus siles partes producit: quarum numerus est d: ideo numerum producunt sed et supfluũt partes secundum numerum c que non numerant b: ergo a et suppartiens ptiũ f denoĩatarum ab e que sit g cõstituent pportiõem multiplicem suppartientem. et hoc pacto quotquot voles quere.

Proposita suppartiente multiplices perscrutari: que cum eadem multiplices suppartientes constituant. 34

f — 10 50 — 3
e — 7 35 — 3
d — 4 20 — 3
Composite
a 5 — 3
b — 3
c — 2

Sit a suppartiẽs data/ et b denoĩans ptes: c vero numerus partium: et sit d maior b vno/ ducaturque c in d et proueniet multiplex b/ et insup totidem ptes. quare multiplex denoĩata ab d cum suppartiente assignata a cõstituet mltiplicẽ suppartiẽtem. et ita fiet si q̃libet mltiplice ad b maior vno sumatur vt e et f. Nec has ppõnes que inuẽtionem pponũt accuratius exequi curaui: que vbi exactior psecutio facta fuisset etiam legentibus allatura fuisset fastidium.

Supparticularis et simul multiplex supparticularis cum eadem multiplice: similes producunt proportiones. 35

c 6 — 4 12 — 4
b 3 — 2 6 — 2
a 2 — 1 Composite.

Sit a pportio multiplex/ et b pportio supparticularis/ et c pportio multiplex supparticularis siml. Dico pportiões compositas ex b et a: et ex c et a esse siles. nam cũ supparticularis denoĩetur ab vno et parte/ et mltiplex supparticularis denoĩetur a numero et eadem parte: numerus igitur multiplicis in vnum et numerum ductus semp facit numerũ. addito igitur vtrobique qd fit ex eodẽ multiplicis nũero in partem que supest si cum vno nũerum facit et cũ reliquo facit eũdem: et si cum vno pars vel partes supfluũt: itidem et cum reliquo. quare prouenient siles pportiões. Id tamen aduerte q si q̃titas denominatiõis crescit in altera productarum qd maxime in suppartientibus accidere solet: non tñ inde genus pportionis mutabitur.

Quãcunque proportiõem suppartiens cum multiplice constituit: eiusmodi etiã cum eadem efficiet simul multiplex suppartiens. 36

16 — 3 c 8 — 3
10 — 3 b 5 — 3
Composite. a 2 — 1

Sit a multiplex: b suppartiens quecũque: et c simul suppartiens multiplex. dico b et a simul/ item c et a simul similem constituere proportiõem. huius vt precedentis demonstratio est.

Si ab vnitate numeri cõtinue disponãtur: et singuli ad pximos descẽdendo comparẽtur: fient oẽs supparticulares proportiones: tanto minores q̃to remotiores. ad vnitatem vero omnes multiplices: tanto minores quãto ppinquiores 37

k — 10
h — 9
g — 8
f — 7
e — 6
d — 5
c — 4
b — 3
a — 2
1

Sint a/ b/ c/ d/ e/ f/ g/ h k numeri ab vnitate continue sumpti: dico pmo k ad h esse supparticularem proportionem. et h ad g. et g ad f. sicque deinceps vsque ad vnitatem. et k ad h minorem esse proportiõem q̃ h ad g et cetere inferiores. et h ad g minorem q̃ cetere inferiores. nam cũ vnitas sit cuiuslibet nũeri pars: et quilibet superiorum addat vnitatem ipsam tñ excludendo sup pximum inferiorem: ergo per diffinitionem k ad h et h ad g atque ita deinceps: est pportio supparticularis. et quia per conceptiõem pars ea minor est que maiorem habet denoĩationem et vnitas similiter per conceptiõem sit cuiuslibet numeri pars ab ipo denoĩata: ergo pportioues ille ab vnitate remotiores: que a minori parte denominãtur sunt minores. et quãto ipsi vnitati ppinquiores a maiori parte denoĩantur: quare tum erũt maiores. et si tota series numerorum esset ordiata: oĩs supparticulares specie quidem habite essent non aũt secundum numerum accepte. nam ea pportio que est ternarij ad binarium: est senarij ad quaternariũ et duodenarij ad octonarium: non tamen due vltiẽ in ordine proximorum numerorum essent accepte. Secũdo dico omnes cõsimiliter cõtinue ad vnitatem sumptas esse multiplices tanto minores q̃to ipsi vnitati viciniores. nam a primus post eam nũerus bis eam cõtinet et b ter et c quater. et ita cõsequẽter secundum oẽs species multiplicium sed et cõtinue a maiore numero denoĩatur multiplex. et q̃to vnitati vicinior a minore: nullus enim binario minor est. est igitur cognitum quod erat demonstrandum.

Si a cõmuni angulo naturalis series numerorum in longum et latum extendatur: et ipsis inuicem multiplicatis: et qui pueniũt in angulari cõuentu positis: si singulorum ordinum ad primum fiat collatio ordo cõtinuus multiplicium pcedet: si ad pximos preterque ad primum ordo supparticulariũ. et qui circa diametrum collocati sunt: oẽs erunt quadrati. qui vero his hinc inde pximi: sunt altera parte longiores. 38

Longitudo.

Latitudo.

1.	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Compartio vbiq̧ ad primā
2	4.	6	8	10	12	14	16	18	20	Dupla ad eandem.
3	6	9.	12	15	18	21	24	27	30	Tripla ad eandem
4	8	12	16.	20.	24	28	32	36	40	Quadrupla ad eandem
5	10	15	20	25.	30	35	40	45	50	Quincupla ad eandem.
6	12	18	24	30	36.	42	48	54	60	Sescupla ad eandem.
7	14	21	28	35	42	49.	56	63	70	Septupla ad eandem.
8	16	24	32	40	48	56	64.	72	80	Octupla ad eandem.
9	18	27	36	45	54	63	72	81.	90	Nōcupla ad eandem
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100.	Decupla ad eandem.
Cōpatio ad altrinsecꝰ primū	Dupla.	Sesqualtera.	Sesquitertia	Sesquiquarta	Sesquiquinta	Sesquisexta	Sesquiseptia.	Sesquioctaua	Sesquinona	

¶ Formata ergo hac mēsula Pythagore ⁊ dispositis vt ꝓponit propositio numeroꝝ ordinibus: dico p̄mo q̧ si singuli ordines ad primum comparētur ꝓuenire per ordinem mltiplices. nā cum vnitas sit caput prime linee: et secūde linee caput p̄musq̧ numerus sit binarius. est ergo primus numerus scđe linee p̄mo numero duplus ⁊ p̄mus multiplex. et quia binarius multiplicat oēs nūeros prime linee: et ex multiplicatione ꝯtinue scđa linea ꝓcreatꝰ ⁊ secūdus numeroꝝ ordo. ergo p̱ diffinitiōem quoties vnitas in binario toties ꝯtinue singuli p̄mi ordinis in singulis secundi existunt. igitur singuli secūdi ordinis ad singłos primi dupli sunt atq̧ eque multiplices. et q2 primus tertij ordinis est triplus p̄mo primi qui est vnitas et ex ꝯtinua multiplicatione singuloꝝ primi ordinis per ip̄m producūtur singuli tertij ordinis: ergo p̱ idē qđ prius singuli tertij ordinis sunt tripli ad singulos primi ordinis. hac q̄q̧ rōne ꝓbabis singulos quarti ad singulos p̄mi esse quadruplos / et quinti quincuplos: sicq̧ deinceps. Secūdo dico q̧ si fiat comparatio tertij ordinis ad scđm / ⁊ quarti ad tertium / et quinti ad quartum / et sexti ad quintum: et ita ꝯsequēter ꝯtinue supparticularium ordines surgere. nam ꝯtinue videmus singulos horū ⁊ singulos illoꝝ ex ductu duoꝝ ꝓximoꝝ numerorum descēdendo ab vnitate sumptorū in eos enasci. at per precedētem illi numeri ꝯtinue seriem supparticularium complent. igiꝰ ⁊ singuli posterioris ordinis ad priorem ordinem sibi retinebunt ꝓportiōem. qđ est scđm. Tertio dico nūeros qui constant circa diametrum esse quadratos. illi enī sunt quoꝝ caput est vnitas: et supremus est oīm maximus quasi lōgissima linea: et numerorū ordines quasi ex equo p̱ medium secātes. quos dicimus esse quadratos. nam illos ꝯtinue videbis ex lateribus equalibus ꝓductos vno sp̱ sm̄ nūerorū seriem crescentibus. erūt igiꝰ oēs quadrati. et si lineas ad eoꝝ latera equidistāter ꝓtraxeris: ꝯtinue quadratam cōcludes figuram. Quarto dico numeros hinc ⁊ inde quadratis altrīsecus ꝓxime adiacētes: esse altera parte longiores. nam oēs illi sm̄ numerorum seriem ꝓducūtur ex lateribus vno distātibus: q̧ vnum eoꝝ latus sit quadrati latus: et alterū sit vno latere eiusdē quadrati minus. sicq̧ tota cognosciꝰ ꝓpositio. Et ex hoc q̄q̧ notum eē potest q̧ si singuli altera parte lōgiores singulis quadratis quibus altrinsecus circūsistunt comparētur: a ꝓportione dupla oēs supparticularium species ꝓcreantur: vt duo primus altera parte lōgior vnitati primo quadrato cōparatus est duplus. et 6 altera p̱te longior ad 4 scđm quadratum relatus per scđam partem huius est sesqualter. et 12 tertius alꝭa parte lōgior ad 9 tertium quadratū p̱ idem est sesquitertius: et hoc pacto ꝯsequēter. ¶ Et idem de supparticulariū speciebus euenerit: si primum altera parte longiorem secūdo quadrato / et scđm alꝭa parte lōgiorem tertio / et tertium quarto. et hoc pacto deinceps comparaueris. ¶ Et rursum si primum altera parte longiorem inter primum quadratū ⁊ scđm collocaueris: similis ꝓportionū habitudo seruatur / eritq̧ cōtinue ꝓportio dupla. ¶ Et si scđm alꝭa parte longiorem / inter scđm quadratum ⁊ tertium collocaueris: ꝯtinue sesqualꝭa habitudo seruabitur ex prima ⁊ scđa parte huius. et ita ꝯsequenter reliquas supparticulariū ꝯiūctas hitudines reperias si reliquos lōgilateros nūeros suis quadratis medios interꝰnexueris: ex quibus digna illa ꝯtemplatio ad Pythagoricā ⁊ Platonicam intelligentiam momētum habens q̄ de quadratis ⁊ alꝭa parte longioribus diuus Seuerinus 33 capite scđi sue Arithmetices elegantissime affert: vel perspectissima esse potest.

39 ¶ Si supparticulares ab vnitate sumātur: binis ⁊ binis disiūctim ꝯiūctis prima multiplicium: ac consequēter oīm supparticularium species ꝓuenire cōueniet.

¶ Sint a / b / c / d / e / f / g / h / k ꝯtinue ab vnitate sumpti supparticulares numeri: ⁊ ꝯiungātur disiūctim bini ⁊ bini scꝫ c a. e c. g e. et k g. dico c ad a esse primam multiplicium et e ad c et g ad e ⁊ k ad g ꝯtinue ꝯstituere species supparticłarium. nam p̱ penultimam erūt a / b c d e f g h k numeri ꝯtinue ab vnitate sumpti: sed ⁊ vno sp̱ intermisso hoc pacto binis ⁊ binis disiunctim sumptis: sumuntur oēs ab vnitate pares. quare per decimāoctauam septimi ipsoꝝ ꝯtinue sunt eedem ꝓportiōes que numerorū ab vnitate cōtinue dispositoꝝ. at binarij ad vnitatem est prima multiplicium et sequētium ad suū precedentem est series supparticularium. constat igitur quod erat demonstrandum.

k——10
h——9
g——8
f——7
e——6
d——5
c——4
b——3
a——2
1

¶Si ꝓpositis ab vnitate quadratis: nūeri eis vno minores sumātur: supparticlares ab illis dicte: proportionum ab vnitate erunt differentie. 40

c 4	f 16	k 15
b 3	e 9	h 8
a 2	d 4	g 3
1		

¶Sit vnitas: et numeri post ipam a b c: et quadrati eoꝝ d e f: et minores eis vno g h k. dico supparticulares denomīatas ab g/h/k que sint d ad g. e ad h. et f ad k: esse differētias ꝓportionum ab vnitate sumptaꝝ vt d ad g esse proportionem qua abundat dupla sup sesqualteram et e ad h esse qua abundat sesqualtera sup sesquitertiam: hūcqꝫ in in modum ꝯsequēter. Nam p primam quinti differētia qua abūdat a ad vnitatē. et b ad a est ꝓportio q̄ fit ex ꝓductis a in se ꝛ vnitatis in b: sed a in se facit d q̄nquidē d est eius quadratus ꝛ vnitas in b per scdam ꝛ decimānonam primi q̄tum g. igitur ꝓportio d ad g est differētia ꝓportionis a ad vnitatem ꝛ b ad a. et hac rōne ostēdetur ꝓportiōem e ad h esse differētiam ꝓportiōis b ad a et c ad b. et ita de quibuslibet consequēter. quod est propositum.

¶Si ordinētur ꝯtinue multiplices ꝛ supparticulares: erit vt extremarū multiplicium quelibet due coniūcte minus sint q̄ media duplicata vel due medie coniūcte: supparticulares vero maiores. 41

h 16 15	f 5 4	c 4 1
g 9 8	e 4 3	b 3 1
	d 3 2	a 2 1

20 12 12 1
Composite mediarum.
18 10 10 1
Composite extremarū.

6—5	d 5—1
5—4	c 4—1
4—3	b 3—1
3—2	a 2—1

¶Sint primo ꝯtinue multiplices a b c: dico cōpositam ex a ꝛ c minorem esse proportiōem q̄ ꝓportio b duplicata. nam quia denominātes ꝯtinue equaliter se excedūt: ergo per scdam primi denoīans b est medietas denoīantiū a ꝛ c simul sumptoꝝ. et p decimānonam eiusdē denoīans b in se maiorem ꝓducit numerum q̄ a in c. at p octauam huius b in se ꝓducit equalē composite ex ꝓportione b duplicata que per vicesimāscdam huius erit multiplex. et denoīans a in denoīantem c: ꝓducit denoīantem per idem multiplicis ex a ꝛ c. igitur multiplex ex b duplicata: a maiore nūero denoīata q̄ multiplex ꝯposita ex a et c maior est multiplice cōposita ex a ꝛ c. qd est primum. Sint secūdo d e f ꝯtinue sumpte supparticulares quaꝝ d sit maxima: ꝛ differētie eaꝝ g ꝛ h. dico ꝓportiōes d ꝛ f simul maiorem ꝯstituere proportionem q̄ sit ꝓportio e duplicata. nam qꝛ per precedētem partes g denoīanꝭ a minori numero et partes h ab maiori: nam a numeris cōtinuorū quadratoꝝ vno minoribus. ergo per primam huius ꝓportio g maior est ꝓportiōe h. at d ꝛ f sunt tanq̄ e g ꝛ f. nam d per se tm̄ est q̄tum e g. et e bis tanq̄ e f et h. et monstrata est e maior h. igiꝭ per quintam quinti erūt d ꝛ f maius q̄ e duplicata. et hoc modo facile idem ꝓ vtraqꝫ parte ostendas si due ponātur medie ꝓportiōes. sicqꝫ cōcluditur propositum.

¶Si impares post ternarium ꝯtinue sumpti: ad nūeros post binarium naturali serie ordinatos comparētur: exibunt suppartientes ꝯtinua denoīatione crescentes. 42

f—9	c—5
e—7	b—4
d—5	a—3

¶Sint a b c numeri post binarium cōtinue sumpti: et d e f sumpti cōtinue impares post ternarium. dico d ad a/ et e ad b/ et f ad c suppartiētes ꝯtinua denoīatiōe crescētes. nam cū differētia imparium sit binarius d addit sup a binarium qui minor est eo vno. igitur d ad a est suppartiēs. et iteꝝ cum differētia imparium sit binarius: et nūeroꝝ ab vnitate dispositoꝝ differētia sit vnitas: addet e sup b vno plus q̄ d sup a. sed et qꝛ c/e/f sunt continue impares: addet f sup c adhuc vno plus q̄ e sup b. crescunt igitur differentie imparium sup nūeros ab vnitate sumptoꝝ sicut ꝛ ipsi nūeri: ita qꝫ cōtinue precedēs est differētia imparis sup sequētem. sed numeri vnitate distātes sunt ꝯtra se primi. igitur differētia q̄ est numerus precedētis ad sequētem numeroꝝ ab vnitate dispositoꝝ: non est pars sequētis. est igitur p primam p̄mi eius ptes. erit igiꝭ ꝓportio e ad b suppartiens/ ꝛ f ad c suppartiēs. et qꝛ sue partes ꝭm numeroꝝ vnitate dispositoꝝ q̄titatem crescunt: erūt ꝛ eaꝝ ꝯtinue crescētes denoīationes: imo ꝛ quia denoīanꝭ a numeris ꝯtra se primis ꝯtinue ꝓcedent diuerse suppartientiū species. qd est propositum.

¶Si compositus ex primo pari ꝛ impari ꝛ qui ex reliquis imparibus eidem ꝯiūctis aggregātur: ad numeros a duobus dispositos comparētur: ꝓueniēt diuerse multiplices supparticulares ꝭm nūeros multiplicium ꝛ denoīationes partium siles habētes. 43

d 5	h 9	n 26
c 4	g 7	m 17
b 3	f 5	l 10
a 2	e 3	k 5

¶Sint a b c d nūeri a binario ꝯtinue succedētes: sintqꝫ e/f/g/h nūeri a ternario ꝯsequēter impares sitqꝫ k compositus ex a ꝛ primo pari ꝛ impari. et l compositus ex f ꝛ k. et m cōpositus ex g ꝛ l. et n ex h ꝛ m: dico k/l/m/n cōpatos ad a/b/c/d/ facere multiplices supparticulares ꝭm nūerum multipliciū ꝛ siles partium denoīationes. nam k ꝯponiꝭ ex a ꝛ e binario ꝛ ternario. at e addit sup a partem vnam ab ipso denoīatam scꝫ vnam mediam seu scdam qd idem valeat: ergo k compatus ad a bis ipm ꝯtinet et eius mediam et ad ipm est primus multiplex supparticularis. sed ꝛ p decimānonam septimi f cōponitur ex a et b. et g ex b et c. et h ex c et d. et per septimā sexti quadratū cuiuslibet addit sup quadratū ꝓximi qd ex ipsis cōponiꝭ vt quadratum b sup quadratum a: q̄tum qd cōponiꝭ ex a ꝛ b. et quadratū c sup quadratum b q̄tum cōponiꝭ ex b ꝛ c. et ita deinceps. et quia k addit sup quadratū a vnitatem: l similiter addet sup quadratum b: et m sup quadratum c: et n super quadratum d vnitatem. quare singuli eoꝝ singulos illoꝝ cōtinent ꝭm se et partem p conceptiōem ab ipis dictam. erūt igitur ꝯsequēter ꝭm ipsos: multiplices supparticulares. quod est propositum.

¶Si duo p̄mi impares ꝯiūganꝭ: cōpositoqꝫ reliqui ipares applicētur: erit vt ꝓportiones cōpositoꝝ ad nūeros post binarium sumptos sint diuerse multiplices suppartientes ꝛ ab eodem numero ꝛ partes numeratas ꝛ multiplices denoiatas habētes. 44

o 6	k 35	f 11
n 5	h 24	e 9
m 4	g 15	d 7
l 3	c 8	b 5
		a 3

¶Sint duo primi ipares a ꝛ b: et cōposit⁹ sit c: sintqꝫ reliq̄ ipares d e f qui addāꝭ ꝯposito c: sintqꝫ aggregati g/h/k/ et l/m/n/o/ numeri ꝯtinue post binariū sūpti. dico c ad l/ et g ad m/ et h ad n/ et k ad o diuersas eē multiplices suppartiētes ꝛ singulas ab eodem numero multiplices denoīatas ꝛ partes

numeratas.nã b addit super a binariũ:ergo c bis continet a illi superaddẽs binariũ. sed binarius est vno minor a:ergo est eius totidẽ partes.est igitur c ad a prima multiplex superpartiẽs: quare ⁊ ad l. qr a et l sunt idem numerus.Item qr vtvisum est c addit binariũ super eo qđ fit ex binario in a.et binarius in m per nonã primi facit c:ergo c bis cõtinet m.sed et per decimãnonam septimi d cõstat ex l et m:⁊ g cõstat ex c et d.ergo g cõtinet ter m.⁊ insuper l tres scȝ eius partes.eritq̃ g ad m secũda multiplex suppartiens.et hunc in modũ probabis l in n cõstituere g.⁊ per decimãnonã septimi m n constituere e.⁊ h cõtinere n secundũ m.et insup m quattuor scȝ partes n.et ita cõsequenter inuenies multiplicium denoĩationes et ab eodẽ numero suppartientiũ partes numeratas:qđ est propositũ.

45 ¶Si due diuerse superparticulares coniũgantur composita aut erit dupla aut superparticularis aut superpartiens.

¶Sint a b c d e f quotlibet per ordinẽ supparticulares:dico q̃ si due quelibet simul iunganẽ compositam esse aut duplã aut superparticularẽ aut suppartiẽtem. nam si a et b sesqualterã et sesquitertiã cõiungis cõposita erit dupla.nã constituta dupla:inuenis per primã quinti sesquitertiã ꝓportionem qua abundat dupla super sesqualterã.constituẽt igitur due prime duplã. sed si cum a aut c aut d aut e aut f cõiunxeris:qr per tricesimãseptimã huius quelibet est minor b cõposita ꝓportio erit illa dupla minor et ideo nõ multiplex. est eñ dupla per eandẽ tricesimãseptimã huius multipliciũ minima:igiẽ cõposita ꝓportio aut erit supparticularis aut superpartiẽs:quod est propositũ.

46 ¶Superparticularem inuenire:cum qua quotlibet superparticularium quelibet:superparticularem componant.

¶Sint a b c quotlibet numeri ab vnitate ꝓportionales:et sit d primus ad a qui idẽ etiã per vicesimã septimã quarti erit primus ad b et c ⁊ cõiungatur d cuilibet eorum et proueniãt compositi e f g.eritq̃ per nonã tertij quilibet eorũ ad quẽlibet eorũ et quoslibet alios illius ordinis ꝓportionaliũ primus. sumo iterũ cõtinue ꝓportionalẽ post primos qui sit h et per vicesimãquintã tertij minimũ quẽ numerant d e f g qui sit k qui per vicesimãseptimã tertij erit primus ad h.sit itẽ per vltimã tertij l multiplex h ⁊ m multiplex k.addatq̃ l super m q̃tum est d.deinde addo sigillatĩ ad l numeros a b c et proueniãt cõpositi n p q:manifestũ est l esse superparticularẽ ad m. nã ei superaddit suã partem scȝ d:sed et n ei superaddit d ⁊ a quod est e.et p ei superaddit d et b quod est f.⁊ q ei superaddit d et c quod est g.⁊ per vicesimãtertiam primi e f g quilibet est pars m:qr est pars k.igitur n p q pariter et l sunt supparticulares ad m.constare ergo potest propositum.

47 ¶Data superparticulari:quotlibet alias inquirere quarum quelibet cum eadem:superpartientem efficiat.

¶Sit a denominãs partem date supparticularis.sumo ab vnitate cõtinue ꝓportionales quorũ ipse sit vnus qui sint a b c.dico ꝓportionẽ superparticularẽ dictã ab a cum supparticulari cuius pars denominaẽ ab b vel ab c constituere superpartientẽ:qualiũ presens proponit inuentionẽ.nam cõposita ex ꝓportione supparticulari denoĩata ab a et denoĩata ab b habet in denoĩatione suivnũ et partes q̃ dicũtur ab a ⁊ ab b per octauã huius. q̃quidẽ partes per quartã huius denominãtur ab eo qđ fit ex a in b qui sit d sed ille per decimãtertiã huius nõ constituunt partẽ:ergo cũ proportio cõposita ex demõstratione penultime nõ sit multiplex neq̃ supparticularis:qr partes composite non cõstituunt partẽ vnã.relinquiẽ ergo compositã esse superpartientẽ: ⁊ ita de qualibet alia.

48 ¶Omnis supparticularis cũ qualibet suppartiẽte:cõstituit ꝓportionẽ tripla minorẽ

¶Nam dupla cũ sesqualtera que per tricesimãseptimã huius est maxĩa superparticulariũ ꝯponunt per correlariũ vicesimetertie huius triplã: sed oĩs proportio suppartiens est minor ꝓportione dupla igitur quecũq̃ ꝓportio superpartiẽs cũ maxima supparticulari aut minori supparticulari p quintã quinti cõstituet proportionẽ tripla minorẽ:quod est propositũ.

49 ¶Datã proportionẽ que tripla minor sit:in supparticularẽ ⁊ suppartientẽ partiri.

¶Sit primo supparticularis quecunq̃ data que hoc modo diuidi petatur.capio a ⁊ b mĩmos terĩos a quidẽ minorẽ ⁊ b maiorẽ inter quos cõsistat.qui per tricesimãseptimã huius erunt numeri in continua serie numeroꝝ sumpti:solaq̃ vnitate distãtes.sitq̃ c cõpositus ex eis cui addatur a et ꝓueniat d: quoquidẽ maior vnitate sit e ⁊ ducãtur a et b in d et proueniãt f et g.eritq̃ per octauã secũdi ꝓportio g ad f ea que b ad a.Itẽ duco a in e ⁊ ꝓueniat h:addetq̃ h super f per nonã primi q̃tum ẽ a:et a est ps f.nã a positus est numerare f secundũ d:igitur h ad f est ꝓportio supparticularis.Item qr b est maior a vnitate per decimã primi g addit super f q̃tum est d.ergo g addit super h minus d quantũ est a: sed substracto a ab d manet c.igitur g addit super h quantũ est c ⁊ per nonam ⁊ decimã tertij c est primus ad g.erit itaq̃ g ad h ꝓportio superpartiẽs:quare proportio supparticularis assignata que est g ad f in duas diuisa est:scȝ h ad f supparticularẽ et g ad h superpartientẽ:quod est propositũ quo ad hoc. Secundo sit superpartiẽs inter a et b minimos terminos:sitq̃ b maior terminus et ducatur b in se et in a et proueniãt c ⁊ d. eritq̃ per septimã secundi ꝓportio c ad d ea suppartiẽs que b ad a. Item addo a ad d et proueniat e.per decimã primi a numerabit e secundũ numerũ vno maiorẽ b.quare e ad d est superparticularis.et quia per decimam tertij e est primus ad b:ergo per vndecimã eiusdem est etiam primus ad c.et cum differentia c ad e non sit vnitas sed vnitate maior:ergo non erit supparticularis. Relinquitur igitur c ad e proportionẽ esse superpartiẽtem:quare suppartiẽs assignata c ad d diuisa est in duas:scȝ e ad d superparticularẽ ⁊ c ad e superpartiẽtem queadmodũ erat propositũ.Tertio sit

inter a et b pportio dupla que qr vt demõstratum est in quadragesimaquita huius constat ex sesqual tera et sesquitertia substrahat per primã quinti pportio supparticularis c ad d quecũqz minor sesquitertia a pportione a ad b: sitqz residua e ad f qua abũdat a ad b super c ad d. et qr maior est pportione sesqualtera que est maxia superparticulariũ neqz est multiplex: qr pportio a ad b est minima multiplicium que nõ resoluitur in multiplices. reliquitur ergo pportionẽ e ad f esse suppartiẽtem. et qr c ad d et e ad f cõstituunt pportionẽ a ad b constat pportionẽ duplam in supparticularẽ et superpartiẽtem esse diuisam. Quarto sit inter a et b quelibet pportio a dupla ad triplã cõstituta: sitqz inter c et d proportio cõposita ex dupla et sesquitertia si proportio a ad b est minor pportione c ad d. ergo substracta pportione sesquitertia a pportione a ad b remanebit proportio minor dupla: sed maior sesqualtera. quare illa residua erit superpartiẽs: et sic pportio a ad b esset cõposita ex supparticulari vt sesqtertia et suppartiente atqz in eas diuisibilis. et si a ad b sit equalis c ad d aut maior: qr pportio addita duple in pportione a ad b: erit minor sesqualtera cũ dupla et sesqualtera per correlariũ vicesimetertie hui9 constituãt triplã. et sesqualtera addita sesqualtere minus cõstituat q̃ dupla cũ sesquitertia qr sesqual tera et due sesquitertie plus sint q̃ sesqualtera sesquitertia et sesquioctaua. at per primã quinti he cognoscũtur equari duplate sesqualtere: et illi duple et sesquitertie. ergo substracta sesqualtera de proportiõe a ad b remanebit pportio minor dupla: sed et maior sesqualtera. quare suppartiẽs. esset itaqz proportio a ad b in pportionẽ supparticularẽ sesqualterã et superpartiẽtem quomodo propositũ est secabilis: quod est propositum.

a — b —
c —8 d —3
43 —98
32 —43
11

e —15 f —8
c —5 d —4
a —3 b —2

Maximã superpartientẽ inuenire: que ex duabus supparticularibus pducitur. 50

Sit a ad b pportio sesqualtera et c ad d pportio sesquiquarta: sitqz e ad f pportio ex his cõposita dico proportionẽ e ad f esse maximã suppartiẽtem que ex duabus supparticularibus pducitur. nã qr dupla ex quadragesimaquita huius producit ex sesqualtera et sesquitertia que sunt maxie supparticulares: ergo pportio e ad f est minor pportione dupla. sed et eadẽ maior est sesqualtera: qr ex ea cum altera cõposita sit. ergo e ad f est pportio suppartiens: sed et quelibet minor supparticularis cũ proportione a ad b sesqualtera: aut c ad d sesquiquarta p quintã quinti minorẽ pportionẽ cõstituet q̃ e ad f. est igitur e ad f maxima suppartiẽs ex duabus supparticularib9 pducta: quod est ppositum.

Superpartientẽ inuenire: que in duas superparticulares diuidi non possit. vnde patet qualibet superpartiente aliam esse maiorem. 51

e —29
a —8 b —15
c —7 d —14

Sit b ad a maxima pportio suppartiens per pcedentẽ cognita: que ex duabus supparticularibus pducta sit et differẽtia b ad a sit c: manifestũ est a esse maiorẽ c suis quidẽ partibus. capio itẽ numerũ d vno minorẽ b: et tunc pportio a ad c: qr a maiore parte denoiatur maior est q̃ proportio b ad d. addo ergo d cũ b et fiat e: manifestũ est e ad b esse suppartientẽ cum cõtineat b et d eius ptes. et per secundã partẽ decimequĩte secundi erit maior pportio e ad b q̃ b ad a. et qr pportio b ad a diuidit in maxias supparticulares constituẽtes suppartiẽtem vt ex precedenti cognoscit et suppartiens e ad b sit maior superpartiẽte b ad a. nõ diuidet ergo suppartiens e ad b in duas minores q̃ b ad a: neqz in easdem in quas diuidit b ad a. relinquit ergo in nullas duas supparticulares superpartiẽtẽ e ad b posse diuidi quod est propositũ. Et correlariũ ex modo demõstrationis cognoscit.

Sola multiplice qualibet non potest sumi minor: et sola superparticulari qualibet non potest sumi maior. 52

Dico primo qualibet multiplice posse sumi maiorẽ. nã per tricesimãseptimã huius oẽs numeri ad vnitatẽ cõparati cõstituunt multiplices et tãto maiores quãto ab vnitate remotiores et series nũerorũ in imensum euadit. igit qualibet multiplice potest sumi maior. Scdo dico qr nõ qualibet multiplice põt sumi minor. nã per eãdem quãto numerus ppinquior vnitate fuerit: tanto ille ad vnitatẽ minorẽ cõstituit multiplicẽ. at descẽdendo nõ abitur in infinitũ. non igit qualibet multiplice est dare minorẽ qd in aliis minime queadmodũ monstrabit accidet. Tertio dico qualibet supparticulari esse minorẽ. Nã pars per primã huius que a minori numero denoiatur maior est: et quãto a maiori minor. et qr series numerorũ in infinitũ succrescit: nõ dabitur pars adeo parua qua minor dari non possit. qualibet igitur supparticulari potest dari minor. Quarto dico nõ qualibet supparticulari esse maiorẽ. naz ps que a numero ppinquiore vnitati denominat maior est: et qr nõ contigit numerũ in infinitũ decrescẽ dabit ergo tandẽ supparticulariũ maxima. at vtriusqz oppositũ vt iam ostẽsum est in multiplicibus accidebat. Quĩto dico qualibet suppartiente esse maiorẽ. hoc ex correlario pcedentis notũ est. Sexto dico omni suppartiente esse minorẽ. nam quacũqz data vt verbi causa supbipartiẽte tertias sumo aliã a totidẽ partibus: denominatis a maiore numero quẽ nõ numerẽt: vt supbipartientẽ quĩtas q̃quidẽ qr a totidẽ minoribus ptibus denominat: neqz pluribus erit minor suppartiente data. qua supbipartiente quĩtas supbipartiens septimas minor est et hac supbipartiens nonas: sicqz cõsequent fm cremẽtum numerorũ infinitũ: quod est ppositum. Potest et id vltimũ ostendi ex tertia parte presentis: adiuuante quadragesima nona huius.

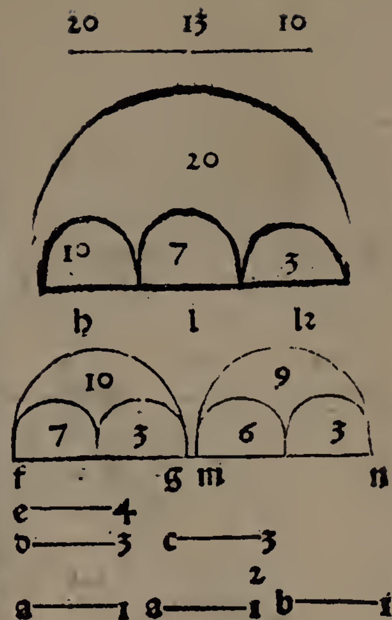
Quelibet due suppartientes coniũcte: proportionẽ quadrupla minorẽ constituẽt. 53

c —3
b —5
a —7

Sit inter a et b proportio superpartiẽs: itidem inter b et c. dico proportionẽ a ad b et b ad c simul: minorẽ quadrupla constituere proportionem. nam a est minus duplo b: et b similiter minus duplo c. ergo a ad c per quintam quinti est minor proportione quadrupla: que per octauam huius ex duabus duplis constat. est ergo clarum propositum.

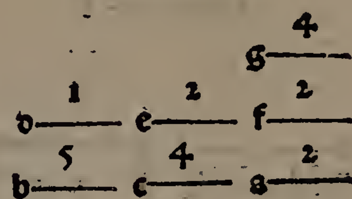
54 ¶ Datā proportionē que quadrupla minor sit in duas superpartientes diuidere.

¶ Sint date ꝓportionis minimi termini a et a b: qui coniuncti faciant d: sitq̄ȝ e maior d vno qui coniuncti faciant f: cui addatur equale d. sitq̄ȝ totus f g: ducaturq̄ȝ a in f g et ꝓueniat h: ⁊ ex a b in eūdem fiat h k l. patet igitur ꝙ ex b in f g fit k l: et ex b in g fit k. quare ex b in f fit l. sit item c triplus ad a et ex c in g fiat m n: sitq̄ȝ n equalis k. per octauam secundi erit proportio h k l ad h tanq̄ a b ad a. ⁊ quia a b per hypothesim est minus q̄ quadruplū a: est ergo b minus q̄ triplum a. quare minus q̄ c. ⁊ quia g est equale d et n equalis g: constat m esse equalem vel multiplicem ad d per duodecimā primi. Item qꝛ d et e sunt contra se primi: ergo per nonam tertij f erit ad vtrunq̄ȝ primus. et per eandē f et g simul ad d primus. et qꝛ a est minor d ⁊ ad ipsum primus per eandē nonam: quod fit ex a in f g scȝ h non numerabitur per decimā eiusdem ab d. et qꝛ d numerat k ⁊ d nō numerat h: ergo k per vicesimātertiam primi nō numerabit h. et quia f g maius ēst q̄ triplum d: ergo maius erit h q̄ n: maius ergo q̄ k. erit ergo k partes h. et eadem ratione qꝛ a b est minor ⁊ primus ad f nō numerabit f quod fit ex a b in f g: scȝ h k l. et qꝛ f numerat l: ergo l nō numerabit h k l: quare neq̄ȝ h k. ⁊ qꝛ per nonā primi l est quātum k bis et b. ⁊ n est equalis k et m equalis vel maior d ⁊ maior b et h maior m n: erit h k maior l. erit igr̄ l partes eius. constat itaq̄ȝ h k ad h esse superpartientē ⁊ h k l ad h k etiam esse suppartientē: in quas diuisa est proportio que est inter a et a b: factumq̄ȝ esse propositum.



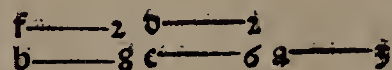
55 ¶ Omnis multiplex supparticularis addit super similē multiplicē: superparticularē a numero qui fit ex ductu numeri multiplicis in numerū partis denominatā.

¶ Sit b ad a proportio multiplex superparticularis: sitq̄ȝ c ad a similis multiplex. dico proportionē b ad a addere super proportionem c ad a supparticularem denominatam a numero qui fit ex ductū numeri multiplicis in numerū denominantē partis superparticularis. Sit enī d quo abundat b sup c et denominās multiplicis sit e ⁊ denominans superparticularis sit f: manifestū est ergo ꝙ a erit in c secundū e: ⁊ d in a secundum f. fiat ergo g ex e in f: eritq̄ȝ per vicesimātertiam primi d in c secundū g. quare b continebit c et partem denominatā ab g. continet igitur proportio b ad a proportionē superparticularem denominatā ab g numero qui fit ex ductu e denominātis multiplicis in f numerū denominantem partis superparticularis: quod est propositum.



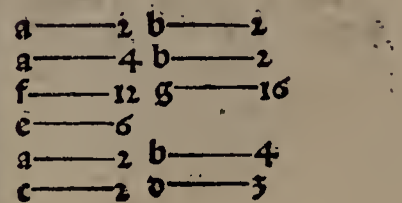
56 ¶ Omnis multiplex superpartiēs cuius multiplicis numerus partes numerat: addit super eandem multiplicē: superparticularē ab vna partium denominatā.

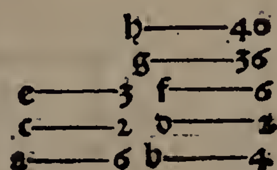
¶ Sit ꝓportio b ad a ꝓportio multiplex suppartiens: sitq̄ȝ d numerus denominās multiplicē scd̄m quē sit sumptus numerus partiū b ad a. dico ꝓportionē b ad a addere super similē multiplicē: superparticularē denominatā ab vna illarum partiū. Sumo enī c ad a similē multiplicē. ⁊ qꝛ b maior est c: sit f quo abundat b super c. qꝛ enī f est partes a sumpte scd̄m d et denominate ab a: ⁊ a est pars c denominata ab d. et cū ex d in a fiat c ex f in a fiet c. est ergo f pars c denomiāta ab a. continet igitur b ad a proportionem superparticularē super ꝓportione c ad a denominatā ab vna partium superpartiētis: quod erat demonstrandum.



57 ¶ Multiplicē superpartientē inuenire: que super totā multiplicē addat superparticularem: cū sint numerus partiū ⁊ numerus denoīans multiplicē dati cōmensurabiles.

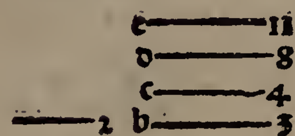
¶ Proponit hec: ꝙ si dati numeri quorū vnus denoīat multiplicē et alter est numerus partiū simul multiplicis suppartiētis: sint adinuicē cōmensurabiles inuenire multiplicē suppartiētem que super similem multiplicē addat supparticularē. Sint p̄mo a numerus denominās multiplicē ⁊ b numerus partiū dati cōmensurabiles. sitq̄ȝ b numerus sumptus scd̄m a et per p̄cedentē factum erit ꝓpositum. Sint scd̄o a ⁊ b cōmensurabiles: sed b sit pars a et adiuuāte p̄cedente ꝑ vicesimātertiam primi cōcludes ꝓpositū. Sit tertio a pars b dicta ab c: sumo quēlibet numerū maiorē a: quē tamen nō numeret qui sit d: et duco c in d et ꝓueniat e. ⁊ qꝛ c in a facit b: erit e maior b. et qꝛ ꝑ septimā secūdi b ad e sicut a ad d et a nō numerat d. igitur neq̄ȝ b numerabit e. duco a in e ⁊ ꝓueniat f: cui adiuncto b fiat g. dico ergo g ad e esse suppartientē que querit̄. nam g cōtinet e secundū a et insup b partes e. ⁊ qꝛ b est pars f ꝙ e multiplex sit ad c: ⁊ a in c faciat b. addet igitur g sup f multiplicē ad e denominatū ab a: numerū b eius partē: quod est ꝓpositum. Quarto sint a ⁊ b cōmensurabiles: sed neuter alterū numeret. ⁊ sit c maximus eos numerās: numeretq̄ȝ c numerū b scd̄m d. capio e quēcunq̄ȝ numerū maiorē c: quē tamē c nō numeret: quē duco in d et ꝓueniat f qui erit maior b: neq̄ȝ ab eo numerabitur. dico ergo vt in precedenti parte īmediate mōstratū est: ꝓportionem suppartientē denominatā ab a ⁊ a partibus dictis ab f sumptis secundū numerum b: addere super multiplicem dictam ab a: superparticularē. hoc vt in precedenti parte monstratur: sicq̄ȝ totum construitur propositum.





58 ¶ Multiplicē superpartientē cuius multiplicis numerus et numer⁹ partes numerās fuerint adinuicē primi: super similē multiplicē: suppartientē addere necesse est.

¶ Sit a numer⁹ multiplicis et b numerus partiū superpartiētis: sintq̄ȝ a ⁊ b numeri adinuicē primi dico multiplicē superpartientē denominatā ab a et partiū b: super similē multiplicē addere proportionē superpartientē. sit enī c denominās partes b manifestū est c esse maiorē b: neq̄ȝ b ip̄m numerare duco ergo a in c ⁊ fiat d per vicesimāprimam tertij b nō numerabit d. addo igitur b super d et fiat e: qꝛ enī e continet c secundū a. et insuper partes c sumptas secundū b est proportio e ad c multiplex superpartiens denoīata ab a et partium b. sed ⁊ proportio d ad c est multiplex dicta ab a: et e addit super d



numerũ b qui monstratus est partes d. constat itaq; ꝓportionẽ multiplicẽ superpartientẽ dictã ab a: et partiũ b addere super similẽ multiplicẽ: vt ꝓponebat ꝓportionẽ suppartientẽ: qđ est propositũ.

a 9 b 6 c 4 · d 3 e 2

❡ Sola superparticulariũ sesqualtera multiplicẽ superparticularẽ procreat. 59

❡ Esto a ad b sesqualtera et b ad c similiter. manifestũ est ꝓportionẽ a ad c compositã esse ex duabus sesqualteris et a continet b ⁊ eius medietatẽ que sit d: et b cõtinet c ⁊ eius medietatẽ que sit e. et quia per quintã secundi d ad e sicut b ad c: ergo d continet e ⁊ eius medietatẽ. d ergo et e simul tantũ sunt q̃tum c et vna pars dicta ab c. cõtinet ergo a numerũ c bis: et vnã eius partẽ. q̃ a cõtineat c et d e totã differentiã a ad c: quare due sesqualtere cõstituunt multiplicẽ superparticularẽ. Secundo ostendit nullã aliam supparticularẽ duplicatã constituere multiplicẽ superparticularẽ. et sũto a b c ꝓportionales alie supparticulares: vt ꝓportio a ad c sit ꝓportio a ad b duplicata. a cõtinet b et partem eius que sit d: quequidẽ bis sumpta minuit a toto aut seipã semel si esset tertia: aut bis si quarta: aut plures ſm q̃ minor pars fuerit. et similit b continet c ⁊ similẽ partem eius que sit e. et q2 d ad b sicut e ad c: ergo d ad e sicut b ad c. cõtinet ergo d semel e et eius vnã similẽ partem: ergo d et e simul minus sunt q̃ c. quare a ad c nõ est multiplex sed et cũ d ⁊ e sint contra se primi vt supponim9: d et e simul per nonã tertij est primus ad e. sed et per vndecimã eiusdẽ c etiam erit primus ad d et e simul. ergo d et e simul nõ numerabũt c. est ergo a ad c ꝓportio suppartiens: quod est ꝓpositum.

16 a 12 b 9 c · 4 d 3 e

a 16 · c 8 · d 4 · b 2

❡ Multiplex ꝓportio in aliq̃t equales ꝓportiones distribui non põt p̃ter mltiplices. 60

❡ Sit ꝓportio a ad b multiplex que diuidatur in quotlibet ꝓportiones equales q̃ sint a ad c: c ad d et d ad b. q2 enim b ad d ⁊ d ad c et c ad a sunt continue ꝓportionales et b primus per hypothesim numerat a vltimum: ergo per decimãtertiam quarti b numerabit d secundũ. quare ⁊ d numerabit c et c itidem a. diuisa est igitur a ad b in ꝓportiones multiplices: quod intẽdebatur.

a b c d · e f g h · k · l

❡ Nulla supparticularis ꝓportio in aliquot equales ꝓportiones est diuisibilis. 61

❡ Sit a ad d quelibet ꝓportio superparticularis: que diuidat si possibile est in ꝓportiones equales a ad b: b ad c: et c ad d. capio e f g h ꝓportiones in minimis terminis ꝓportionis a ad b: et per equam proportionalitatẽ que proportio a ad d ea est e ad h. sed a cõtinet d et eius partẽ: igitur et e cõtinebit h et eius partẽ que sit l2: que si fuerit numerus cũ l2 numerabit h ⁊ etiã e. ergo h et e nõ erunt minimi quod per quintã quarti repugnat hypothesi. alioquĩ si l2 est vnitas est pars denoĩata ab h. addo ad h vnitatẽ: sitq; cõpositus l: eritq; que proportio a ad d ea l ad h. ergo per duodecimã quarti quot medij ꝓportionales intercidũt inter a et d: totidẽ ⁊ inter l et h sola vnitate distãtes: qđ est ĩpossibile. Ex hac cognoscit tonus in musica qui ex sesq̃octaua ꝓportione nascitur: in duo equa parti nõ posse.

❡ Superpartientẽ proportionẽ que duplicata suppartientẽ constituat: inuenire. 62

❡ Sumo quãlibet proportionẽ que minor sit dupla quã per quinquagesimãquartã huius partior in duas superpartientes quarũ minor si dupletur efficietur proportio minor dupla: quare qualibet multiplice. que q2 per precedentẽ nõ erit superparticularis alioquin superparticularis in duo equa secaretur: constat eam esse superpartientẽ: factumq; esse propositum.

289 a 204 c 144 b

❡ Multiplicẽ supparticularẽ q̃ ex duab9 suppartiẽtibus equalib9 ꝯponat: reperire. 63

❡ Sumo secundũ exigentiã decime octaui quadratos a et b p̃ter primos quorũ a addat super duplũ b vnitatẽ manifestũ est ꝓportionẽ a ad b esse multiplicẽ superparticularẽ. at ex illa decima facile cognosces proportionẽ lateris a ad latus b esse superpartientẽ. sumo ergo secundũ exigentiã correlarij quarte sexti mediũ proportionale inter a et b: eritq; per tertiã eiusdẽ sexti proportio a ad c tanq̃ proportio lateris a ad latus b. quare constat proportionẽ multiplicẽ superparticularẽ a ad b compositã esse ex proportionibus a ad c et c ad b duabus sc3 equalibus suppartientibus: qđ est propositũ.

❡ Superpartientẽ inuenire que duplicata multiplicẽ superpartientẽ constituat. 64

g 16 25 · f 12 15 · d 9 e 4 9 · a 3 b 4 5 · c 2 3

❡ Sit a quilibet impar et b proximus par maior cuius medietas sit c. capio superpartientẽ sumptã a partibus denominatis ab a ⁊ numeratis ab c: quam duplicatã dico esse petitam. nam si illa in se ducatur proueniet numerus et partes numerate ab a ⁊ a quadrato c qui sit e: et denominate a quadrato a qui sit d. sed cum a ⁊ c sint contra se primi alioquin a et b cõmunicarẽt. ergo per vndecimã tertij a est primus ad e: ⁊ per nonã eiusdem a et e simul sunt primus ad a. quare a et e simul per vndecimã eiusdẽ sunt primus ad d. ergo partes numerate ab a et e nõ numerabũt d. quare ꝓportio superpartiẽs que assignata erat duplicata cõstituit multiplicẽ superpartientẽ. Q; si hec demõstratio tibi suboscura videtur pro hac ⁊ sequẽtibus declarationẽ accipe. q2 enĩ in presenti superpartiẽs inuenta erat superbipartiẽs tertias que denominat ab vno ⁊ duabus tertiis. duc ergo denominationẽ superbipartientis tertias per octauã huius in denominationẽ superbipartiẽtis tertias sc3 ducẽdo primo duas tertias in duas tertias. et per quartã huius proueniũt quattuor none. secũdo duas tertias in vnũ ⁊ ꝓueniũt due tertie. tertio vnũ in duas tertias et iterum proueniũt due tertie. ⁊ quarto vnũ in vnum: et ꝓuenit vnum: habebisq; quattuor nonas duas et duas tertias ⁊ vnũ: sed due ⁊ due tertie: id ẽ quattuor tertie faciunt vnum integrũ et vnam tertiam: quod quidẽ vnum alteri vni additũ constituit binarium et vna tertia est tres none: quod per secundã huius facile cognoscas. que siquidem tres none aliis quattuor nonis primo inuẽtis addantur fiunt septem none. Patet itaq; proportionẽ superbipartientẽ tertias duplicatam: constituere duplam et superseptupartientẽ nonas que est multiplex superpartiens: vt proponebat propositio: quod est propositũ declaratum.

$\frac{2\ 9}{7}$ · $\frac{1\ 3\ 3\ 9}{2\ 2\ 4}$ · $\frac{1\ \ 3}{2}$ · $\frac{1\ \ 3}{2}$

65 ℭ Multiplicem superparticularem inuestigare: que multiplicem superparticularem duplicata producat.

ℭ Capio a numerū quēcunqꝫ quem duco in se ⁊ proueniat b cui addo vnitatē: sitqꝫ totus c manifestū est proportionē c ad a esse multiplicē superparticularē: que si in se ducatur est tātum ꝙ̄tum a in se ⁊ in partē bis et pars in se: sed a in se ⁊ in partem bis numerū producit: et pars in se producit partē. igit̄ quod producitur est numerus et pars. erit itaqꝫ proportio composita multiplex superparticularis. Posses item probare vt quinquagesimānonam huius.

c—5
b—4
a—2

66 ℭ Multiplicem superparticularem inquirere: que bis sumpta multiplicem superpartientem componat.

ℭ Sit quilibet impar a et b proximus par ⁊ eius medietas sit c. sumo multiplicē superparticularem cuius multiplicis numerus sit c et pars dicta ab a. que proportio sit d ad e: dico proportionem multiplicem superparticularē d ad e bis sumptā constituere multiplicē superpartientē. nam si hec in se ducatur ꝓueniet quadratus c et partes similes sumpte ꝯm b ⁊ pars a quadrato a dicta. ille autē partes vnum constituūt et vna supfluit cū illa. et qꝛ ille due partes per duodecimā huius vnā non cōstituunt productum erit numerus et partes. quare proportio composita erit multiplex superpartiēs. ⁊ in proposito esset quincupla superquadripartiens nonas.

49 9
b
a—4
c—3 d—7 e—3
—2 5 9
4

67 ℭ Multiplicem superpartientem perscrutari: que duplicata multiplicem superparticularem componat.

ℭ Sumo per sexagesimātertiam huius superpartientē que duplicata multiplicē superparticularē cōponat et numer⁹ denominās partes sit a ⁊ numerās sit b et vno maior ꝙ̄ a sit c: atqꝫ c ducatur in a: et producto addatur b. sitqꝫ totus d manifestū proportionē d ad a esse multiplicē superpartientē cui⁹ numerus denominās multiplicis est c et denominās partiū est a ⁊ numerus earū est b: quā duplicatā dico esse multiplicē superparticularē. nam denominatio ipsius in se ducta producet numerū et partē quod vt in precedentibus videre promptum est.

d—161
c—13
a—12
b—5

68 ℭ Multiplicem superpartientem: ex qua geminata multiplex superpartiens prouc-niat: demum restat inspicere.

ℭ Queratur per sexagesimāsecundam huius suppartiens que geminata multiplicē superpartientē constituat: qua inuenta vt in precedente procedendū est.

69 ℭ Datam proportionem in proportiones: quarum quotlibet sint superparticulares equales redigere.

ℭ Sint minimi termini date ꝓportionis a et b: sitqꝫ c numerus ꝯm quem sumēde sunt superparticulares equales. deinde maior c ducatur in a et in b ⁊ fiant d et e: ita tamen vt inter d ⁊ c sint plures numeri ꝙ̄ vnitates in c et ꝓximus post d qui erit maximus eorū sit f. manifestū est ꝓportionē f ad d esse proportionem superparticularē ⁊ minimā omnium que continue sunt inter numeros ab d vsqꝫ ad e: qꝛ denominata est a minore parte. continuo proportionē f ad dvno plures ꝙ̄ sit numerus c: sintqꝫ g h k l m: eritqꝫ proportio h ad m composita ex ꝓportionibus f ad d sumptis secundū numerum c. ⁊ quia d per decimānonam tertij est aliquoties in h sit e toties in n manifestū est h ad n eē vt d ad e. quare vt a ad b. constat ergo proportionē a ad b esse diuisam in ꝓportiones quarū aliquot sumpte erunt equales supparticulares secundū numerum assignatū: quod est propositū.

f—13
d—12 e—6
c—3
a—2 b—1
g h k l m

70 ℭ Propositis quotlibet equalibus terminis ex illis totidē in ordine duplos: atqꝫ ex illis triplos procreare: atqꝫ ex prius inuētis totidē in proxima multiplicitate cōtinue ꝓportionales producere. itemqꝫ ex illis similes elicere superparticulares.

ℭ Figura equalitatis quotcumqꝫ terminorum equalium.

S E N A R I A						16	16	S E P T E N A R I A					16	16	16
E Q U A L I T A S				4.	4	4		Equalitas			4	4	4		
Equalita-	A	1	1	1	1	1	1	tes.	1	1	1	1	1	1	1
Dupl.	B	1	2	4	8	16	32		1	2	4	8	16	32	64
Tripli.	C	1	3	9	27	81	243		1	3	9	27	81	243	729
Quadrupli	D	1	4	16	64	256	1024		1	4	16	64	256	1024	4096
Sesqlteri.	E	32	48	72	108	162	243		64	96	144	216	324	486	729
Sesqtertii.	F	243	324	432	576	768	1024		729	972	1296	1728	2304	3072	4096
Sesqqrti.	G	1024	1280	1600	2000	2500	3125		4096	5120	6400	8000	10000	12500	15625
		H	K	L	M	N			H	K	L	M	N	O	

¶ Precepta sunt hec.
1 Primum.
2 Primum/ secundū.
3 Primū scđz bis:tertiū

Figura trine equalitatis:

			O	P							O	P			O	P
Trina e=	A	1	1	1	qua=	2	2	2	li=	3	3	3	tas.	4	4	4
Dupli.	B	1	2	4		2	4	8		3	6	12		4	8	16
Tripli.	C	1	3	9		2	6	18		3	9	27		4	12	36
Quadrupli	D	1	4	16		2	8	32		3	12	48		4	16	64
Dupli cōuersi.	E	4	2	1		8	4	2		12	6	3		16	8	4
Sesqualteri.	F	4	6	9		8	12	18		12	18	27		16	24	36
Tripli cōuersi.	G	9	3	1		18	6	2		27	9	3		36	12	4
Sesquitertii.	H	9	12	16		18	24	32		27	36	47		36	48	64
Quadrupli cōuersi.	K	16	4	1		32	8	2		48	12	3		64	16	4
Sesquiquarti.	L	16	20	25		32	40	50		48	60	75		64	80	100
			M	N			M	N			M	N			M	N

a——— o———
o——— p———
o———p a———o
o——— a———

¶ Pythagorici/Magi/Prisci sacerdotes atq̧ qui p̄cipue de rebus agunt diuinis admirātur equalitatē pariter ⁊ trinitatē in suis archanis in imagine numerorū venerātur taciti: tanq̄ rerum omniū p̄ncipia: a quibus oīs rerū profluit proportio: proportionū nexus: oīsq̧ admirabilis harmonia et in que tandē reuocatū eunt oīa. Propter ergo mysteria priscorū qđ autor generalius intēdit: primū in trina demōstrādum ē equalitate. ad qđ quidē rite peragendū tria satis sunt vbiq̧ veterū p̄cepta a Diuo nob̄ ānotata Seuerino. Primū est: Primū. Scđm est: Primū/ scđm. Tertiū est: Primū/ scđm bis/ tertiū Sint ergo a o p tres termini equales quicūq̧ vt monadū/ dyadū/ triadū aut cuiuscūq̧ alterius nūeri voles. Utor primo p̄cepto capioq̧ primā vnitatē quā colloco sub p̄ma sitq̧ b. deinde vtēdo scđo p̄cepto capio primā ⁊ scđam simul: quas colloco sub scđa. sintq̧ m et vtēdo tertio p̄cepto: capio primā ⁊ scđaз bis: et tertiā semel: quas colloco sub tertia sintq̧ n. dico b m n ꝯtinue ex equalitate natos duplos. Nā cū a prima vnitas ⁊ b sint idē: et prima et scđa vnitas sint duplū ad primā vnitatē a et p̄ma ⁊ secunda vnitas sint m: ergo nūerus m duplus ē ad b: et cū scđa vnitas bis sūpta equet̄ m et sit̄r prima ⁊ tertia simul equentur m ⁊ n sit scđa vnitas bis et p̄ma ⁊ tertia semel. ergo n duplus est ad m. sunt igit̄ b m n ꝯtinue dupli ab equalitate scз queadmodū dictū est proxime geniti. ¶ Potes idē mōstrare p vicesimā et sextā secundi. Nā q2 a ad o: vt o ad p. ergo p vicesimā secundi o et p ad a ⁊ o vt o ad a. et q2 o ⁊ p ad a et o: sicut o ad a. ergo p sextā eiusdē secundi o p et a o: ad a ⁊ o sicut o et a ad a. at o p et a o simul sunt n et a ⁊ o sunt m et a est idē b. igit̄ b m n cōtinue proportionātur: sed m ad b cognit⁹ est duplus igit̄ et n ad m duplus. Et in oībus sequētibus hic argumētandi modus ē efficax. Et q̄cunq̧ trina capiet̄ terminorū equalitas: eadē valeāt argumēta. ¶ Scđo dico ex b m n duplis cōtinue procreari triplos. capio equale b et colloco sub b in tertia linea sitq̧ c. deīde capio b m sil' ⁊ colloco sub m sintq̧ m tertie linee rursum capio b m bis et n ⁊ colloco sub n: sitq̧ suo modo n. dico c m n tertie linee eē triplos. Nā per vicesimā scđi adiuuāte sexta eiusdē c m n sunt cōtinue proportionales: sed et q2 c equatur b ⁊ m supius duplus ē ad b: igit̄ b et m supius sunt triplus ad b. sed b ⁊ m superi⁹ sunt m īferius: igit̄ inferius m ad c tripl⁹. quare n ad idem m etiā triplus. sunt igit̄ c m n cōtinue tripli. et eisdē preceptis ⁊ demōstrationib⁹ ex triplis nascētur quadrupli. ex quadruplis quicupli. ⁊ ex cōsequētibus hoc pacto multiplices eēs qui libet ex proximo minore. ¶ Tertio dico ex multiplicib⁹ cōtinue nasci supparticulares. vt ex duplicib⁹ sesqualteri ex triplis sesq̄tertiū. ex quadruplis sesq̄quarti. ⁊ ita ꝯsequētes supparticulares per ordinē ex naturalit̄ ꝯntibus multiplicib⁹. Cōuerto duplos q̄ reperti sunt: sintq̧ conuersi e m n: eritq̧ e ad m duplus et m ad n duplus: quare m dimidiū e. Capio equale e qđ sit f ⁊ colloco sub e. deinde capio e m simul et colloco inferius sub m: sintq̧ m īferius. rursus capio e m bis ⁊ n simul: et colloco inferi⁹ sub n sintq̧ itidē inferius n. p vicesimā secūdi adiuuāte sexta eiusdē f m n cōtinue proportionātur. sed cū e ⁊ f equētur et m sit dimidium e: ergo e m simul cōtinet totum e ⁊ dimidiū. quare e m ad e per diffinitionē ē sesqualt̄ sed e m simul sunt m īferius. ergo m inferi⁹ est sesqualter ad f. quare ⁊ n ad m etiā sesqualt̄ qđ est propositū. et ita eisdē preceptis expedi de sesq̄tertiis/ sesq̄quartis/ sesquiquītis ⁊ reliq̄s supparticularibus cōuertēdo terīos suarū multitudinū. Nunc idē superest demōstrandū qđ autor intēdit sumptis quotcūq̧ termīs. Quotq̄t sumpti fuerīt termini equales: dupli cōtinue nascētur si cōtinuatī rite vtamur supioribus p̄ceptis. p̄mo quidē capiēdo primū terminū et collocādo sub primo. Et scđo capiendo primū et scđm ⁊ collocādo sub secūdo. Et tertio capiendo primū scđm bis et tertiū: et collocādo sub tertio. deīde intelligēdo tertiā quartā et quintā equalitatē cōtinue sumi s̄m numerū tertij extremi subter collocati. et resume p̄cepta primo capiēdo primū terminū trine equalitatī ⁊ collocādo sub tertio īmo iam collocatū reperies. Secūdo capiēdo primū et scđm ⁊ collocādo sub quarto. Et tertio capiēdo primū scđm bis et tertiū ⁊ collocādo sub quīto. et secundū numerū illius quinti termīı subter collocati intelligo iterū cōtinue tres terīos equalitatis scз quintū sextū et septimū. et resumptis p̄ceptis cum quinto iam habito: perficio sextū et septimū inferiores termīos et secundū exigentiā septimi extremi intelligo rursum trine equalitatis termīos: scз septimū octauū et nonū et a singulo quoq̧ tertio loco cōiunctim trinā equalitatē intelligo cuius quilibet terminus intelligit̄ secundū numerū extremi in singulo quoq̧ loco subter veniētis. et si id placet in infinitū extendi libet. ⁊ dico cōtinue collocatos eē duplos. id resumptis demōstrationibus quoties erunt resumpte equalitatū trinitates: sicut et superiora facillime demonstrabis. Si cupis triplos eodem ferme modo nascētur de duplis. Id solum ob seruandū est vt in tertiis quibusq̧ locis cōiunctim capiant̄ termini triplorū a tribus duplis qui nas=

cuntur ex trina equalitate terminorū sumptorum secundū numerū tertiū cuiusq; extremi triplorum. ⁊ quadrupli cōsimiliter a triplis acceptis cōtinue tribus triplis secundū exigentiā equalitatis tertiū extremi triplorū et hac analogia in consequētibus multiplicibus. Et sesqualteri/sesquitertij/sesquiquarti ⁊ consequētes nascentur cōuersis duplis/triplis/quadruplis et consequētibus sumptis simili obseruantia duplis conuersis triplis quadruplis et reliquis quoties oportet a trina equalitate: sed quorum multipliciū/conuersorū primum atq; maximū extremorum equetur singulo quoq; tertio supparticulariū et vbiq; vt in precedētibus est idem demonstrandi modus.

71 **Datis superparticularibus vel multiplicibus supparticularibus multiplices superparticulares et superpartientes: datis vero superpartientibus aut multiplicibus suppartientibus superpartiētes et multiplices superpartiētes procreare.**

d	e	f	
4	6	9	Supparticulares
4	10	25	Multiplices sup
a	b	c	particulares

Sint a b c supparticulares termini et sumatur a semel ⁊ sit e primus numerus et a semel ⁊ b semel et sit f secūdus numerus ⁊ ita secundū trine profectionis precepta vt in precedēti factū est et proueniāt d e f qui vt in precedēti erunt continue proportionales. at per decimāoctauam huius proportio e ad d est multiplex supparticularis: igitur et f ad e. erunt igitur cōtinue d e f multiplices supparticulares. et eodē modo ex multiplicibus supparticularibus nascētur multiplices supparticulares. Si vero cōuersis terminis a b c incipias per eandē decimāoctauā huius prouenient cōtinue superpartiētes: sicq; constat primū. Secūdum vero eodē modo patebit per decimānonam huius dato ordine superpartientiū aut multiplicium suppartientiū. nam si aggregatio a minori incepta fuerit per dictā decimānonam prouenient multiplices suppartientes: si a maiori termino: prouenient suppartiētes: sicq; constat propositum.

Ex duabus vltimis cōclusionibus colligere potes. Ex equalitate prime nasci duplos. Ex duplis triplos. Ex triplis quadruplos: ⁊ hoc pacto de reliquis multiplicibus consequenter. Et ex multiplicibus conuersis nasci supparticulares: vt ex duplis sesqualteros. Ex triplis sesquitertios: et ita de cōsequētibus supparticularibus ex sequētibus multiplicibus. Et ex supparticularibus multiplices supparticulares: vt ex sesqualteris duplos sesqualteros. Ex sesquitertiis duplos sesquitertios: et hūc in modū de reliquis. Ex multiplicibus supparticularibus itidē multiplices supparticulares: sed ex duplis supparticularibus tripli supparticulares. Et ex triplis supparticularibus quadrupli supparticulares. Ex supparticularibus et multiplicibus supparticularibus cōuersis suppartiētes: vt ex sesqualteris supbipartientes. Ex sesquitertiis suptripartiēs. Ex duplis sesqualteris ⁊ ex duplis sesquitertiis cōsimiliter supbipartiētes et suptripartiētes. Ex suppartiētibus multiplices suppartiētes: vt ex supbipartiētibus duplas supbipartiētes. Ex suptripartiētibus duplas suptripartiētes. Ex multiplicibus suppartiētibus: itidē multiplices suppartiētes: sed ex duplis triplis aut quadruplis suppartiētibus: tripli quadrupli aut quīcupli suppartiētes. Ex cōuersis suppartiētibus aut multiplicibus suppartiētibus: nascūtur suppartiētes. Et ex tribus preceptis hec vbiq; latissime patēt. ⁊ expressa quantacunq; voles longa serie: supparticulariū cōtinue proportionaliū si cōtinue tria precepta tribus ⁊ tribus terminis seriei aptādo procedis: nascētur multiplices supparticulares sed solū per tres et per tres cōtinue proportionales. et eodē pacto conuerso ordine nascētur suppartiētes sed solū in tribus ⁊ tribus terminis cōtinue proportionales. at de his hactenus.

72 **Datas superparticulares in multiplices atq; easdem in minores multiplices donec ad equalitatem perueniant: reducere.**

l	m	n
g	h	k
9	12	16
a	b	c
9	3	1
d	e	f

Id animaduertere licet proportiones in illas tantū resolui ex quibus procreantur. Quo fit vt in omnibus idē resoluendi modus appareat: in quibus idē erat modus procreandi. Sint a b c dati termini cōtinue supparticulares et sit d equalis a ⁊ primus nūerus: et ab b tollatur d ⁊ remaneat e ⁊ de c tollatur d et e bis ⁊ remaneat f. dico d e f esse cōtinue proportionales et multiplices. quod sint cōtinue proportionales declaratur. capio enim g h k tres terminos in cōtinua proportione d ad e: quos ex illis superiori aggregandi modo prouenient erunt ex precedētibus cōtinue proportionales et sint l m n. et quia l ad g sicut a ad d ⁊ m ad h sicut b ad e. ⁊ ita consequenter igitur d e f sunt cōtinue proportionales. et quia b ad a per hypothesim est supparticularis per decimāsextam huius erit e ad f similis denominationis multiplex. quare supparticulares date: sunt in suas multiplices reducte. si itaq; superparticulares date erant sesquitertie resolute sunt in triplas si sesqualtere in duplas quod si reducte sint in triplas eodē modo quo prius adiuuante septuagesima huius probabis illas multiplices reduci in duplas et duplas in equalitatē: quod est propositum.

73 **Multiplices superparticulares in superparticulares: ⁊ multiplices superpartiētes in superpartientes resoluere.**

Sint a b c tres termini multiplices supparticulares. et d equalis a quod substrahatur ab b ⁊ relinquatur e ⁊ eo modo quo in precedēti substrahātur. si b ad a erit multiplex supparticularis vtriq; ab eodē nūero denominatus per quadragesimāprimā huius factū erit propositū. et ita de suppartiētibus. At si multiplex sit maioris denominationis nō fiet hoc prima resolutione: sed resoluemus primo in multiplices vno minoris denominationis denominatione partis semper eadē manente: donec ad hoc veniamus vt eadē sit denominatio multiplicis et partis sicq; quod proponitur facile apparebit.

Quaslibet superpartientes in superparticulares reduci est possibile.

9	15	25
a	b	c
9	6	4
d	e	f

74 Nam quia per septuagesimāprimam huius suppartientes ex supparticularibus nascūtur. ideo sint a b c huiusmodi superpartiētes ⁊ d equetur a: substrahaturq; d ab b et relinquatur e ⁊ d et e bis ab c: et relinquatur f ⁊ venient per illam septuagesimamprimam superparticulares a quibus nascebantur. at non oportet id semper in prima reductione contingere quod tamen nunc cōtingebat. sed aliquādo resoluētur prima resolutione in multiplices superparticulares que per precedentē in supparticulares tandē reducentur: quo facto factū erit propositū. Aliquando in suppartiētes aut multiplices suppartientes

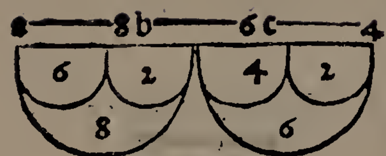
et multiplex suppartiens per p̄cedentē reducit̄ in suppartientē que tex reducetur in supparticularē vt si detracto d de b remaneat e quē contineat d et eius partes:vel in supparticularē si eo detracto remaneat e quē contineat d et eius partē.at si remaneat e quē contineat d et partes.q2 illa detractio in infinitū fieri non pōtvt semp in suppartiētes resoluatur aliqñ occurret supparticularis.factūq; apparebit propositū.Occurret dico tandē superparticularis et nō multiplex:q2 ex multiplicibus non imediate suppartientes sed superparticulares per septuagesimā huius gignūtur.

¶Datas proportiones quascunq; ad equalitatem reducere. 75

¶Nam per septuagesimātertiam huius multiplices suppartientes reducūtur in superpartiētes et multiplices supparticulares in superparticulares ꝛ per p̄cedentē suppartiētes in supparticulares. et per septuagesimāsecundam huius supparticulares reducūtur in multiplices et mltiplices in alias multiplices donec in equalitatē restitute sint.omnes igitur in equalitatē reducūtur.

Noni elemētoꝝ Arithmetices Jordani finis.

Edictas est connectio extremorū: habitudine vtriusq; ad mediū. Medietatum quedam sunt principales: et quedam principalibus collaterales. Principales sunt tres. Prima est quādo maioris/medij/ac minoris equales sunt differētie.et hec dicitur Arithmetica medietas.Secūda est quādo maximi ad mediū eadē est proportio:q̄ medij ad minimū.et hec geometrica vocatur Tertia est qñ maximi ad minimū eadē est ꝓportio: que d2ie maximi ad mediū ad differentiā medij ad minimū.et hec musica nūcupatur. Collaterales sunt octo.Prima est qñ maximus ad mediū sicut d2ia minorū ad differentiā maiorum. Scda est qñ medius ad minimū:sicut d2ia minorū ad differētiam maiorū.Tertia est qñ maximus ad mediū sicut d2ia extremorū ad differentiā maioꝝ. Quarta est qñ medius ad minimū sicut d2ia extremorū ad differētiam maiorū. Quinta est qñ medius ad minimū: sicut differētia extremoꝝ ad differentiā minorum.Sexta est qñ maximus ad minimū:sicut differētia minorū ad d2iam maiorū.Septima est qñ maximus ad minimū: sicut d2ia extremorū ad differentiā maiorum. Octaua est quando maximus ad minimū: sicut differentia extremorum ad differentiam minorum.



¶Si fuerint tres numeri in arithmetica medietate dispositi:erit maioris ad medium minor proportio q̄ medii ad minimum. 1

¶Sint a b c tres numeri in arithmetica medietate dispositi quoꝝ maximus sit a:dico a ad b minorē esse ꝓportionē q̄ b ad c.nā per diffinitionē a ad b et b ad c equales sunt d2ie:q2 igitur a ꝛ b sunt vt cōpositi ex b et c ipsis additis numeris equalibus sc3 differentiis eorū. ergo per decimāsextam secundi ꝓportio a ad b minor erit proportione b ad c:quod est propositum.



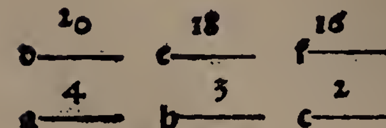
¶In eadē medietate duo extremi cōiuncti tm̄ reddunt: q̄tum medius duplicatus. 2

¶Nam ꝑ diffinitionē primi ad mediū et medij ad extremū equales sunt d2ie: igitur ꝑ secundā primi medius est extremorū coniūctoꝝ medietas. duplicat9 igitur equat̄ extremis ꝯiūctis: qd̄ est ꝓpositū.



¶In eadē medietate quod sub extremis continetur cum quadrato differētie equale est quadrato medii. 3

¶Nam per premissam duo extremi simul sunt tanq̄ duplus medij. Ponat̄ ergo duplus medij q̄ sit d diuisus ꝑ duo equalia quoꝝ medius est vnū:ꝛ per duo inequalia q̄ sint a c extremi: et ꝑ decimānonā primi erit quadratus b vnius equalium q̄tum quod fit ex a in c cum eo quod fit ex differētia a ad b in differentiā b ad c. at q2 differentie ille sunt equales: tantum ergo erit quadratū medij b q̄tum quod cōtinetur sub extremis a ꝛ c cum quadrato d2ie medij ad extremū: quod est propositū.



¶In eadem quoq; medietate quadrata extremorum : duplum sunt quadrato medii et quadrato differentie. 4

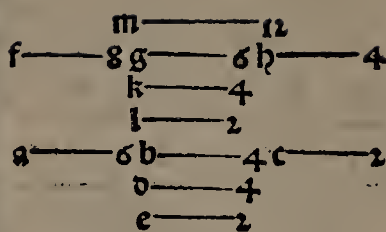
¶Sint a b c numeri in hac medietate dispositi:sitq; d quadrata a et c.dico d duplū esse quadrato medij ꝛ quadrato d2ie simul.Sit enī f qd̄ fit ex a in c bis ꝛ quadrata b medij bis sint e:q2 enī per secundā huius a et c cōiuncti tantū sunt q̄tum duplus b. et per decimāquintā primi d ꝛ f simul tm̄ sunt q̄tum quadratū totius a c:sed ꝛ per eandē decimāquintā e erit medietas d ꝛ f simul.igit̄ per secundā partē secūde primi e ad d ꝛ ad f equales sunt d2ie.igitur per diffinitionē e hac medietate medius est inter d et f.ꝛ q2 per p̄cedentē qd̄ fit ex a in c semel cū quadrato d2ie tantū est q̄tum b in se.igit̄ e addit super f duplū quadrati d2ie:quare ꝛ d tantum addet sup e.quare ꝛ duplū quadrati differētie b ad a equat̄ d. igitur quadratus b q̄ est medietas e cū quadrato differētie b ad a est medietas d: qd̄ est propositū.



¶Trium numeroꝝ in hac medietate dispositoꝝ duob9 extremis datis:mediū reꝑire. 5

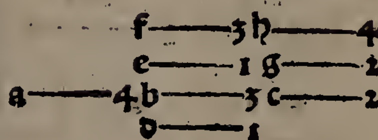
¶Sint a b duo extremi in hac proportione:illos simul addo atq; aggregati sumo medietatē que per secundam huius erit medius petitus:factumq; erit propositū.

6 ¶Si ſm ꝓportiõem medii datoꝝ numeroꝝ ad dr̃iam: ſumãtur tres nũeri in eadem medietate:erit medii illoꝝ ad differẽtiam:que inter extremos p̃aſſignatoꝝ ꝓportio.



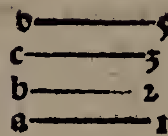
¶Sint a b c tres numeri in Arithmetica medietate quoꝝ maximus ſit a.et ſit d differẽtia a ad c:et e medietas que eſt differentia a ad b ⁊ differentia b ad c.ſumo item in eadem medietate numeros f g h quoꝝ extremoꝝ ſit ꝓportio tanq̃ b ad e:ſitq̧ f maximus.dico g ad differẽtiam f ad g q̄ ſit l eam ꝓportionem eſſe que a ad c.capio eni differẽtiam f ad h q̄ ſit k:cuius medietas ſit l.et cõpoſitus ex f et h ſit m.qꝛ eni per hypotheſim b ad e tanq̃ f ad h:et b ⁊ e ſunt a.igitur ꝑ ſextam ſecundi a ad e ſicut m ad h. et quia vt dictũ eſt b ad e vt f ad h:ergo ꝑmutatim b ad f totus ad totũ:ſicut e ad h detractus ad detractum.igitur per quintam ſecundi c ad k reſiduus ad reſiduum ſicut totus ad totũ.quare ⁊ vt e ad h: ita c ad l.permutatim ergo e ad c vt h ad l.ergo ꝑ viceſimãprimam ſecũdi ⁊ equã ꝓportiõalitatem m ad l ſicut a ad c.ergo ꝙ per ſcd̃am huius g ſit dimidium m:erit a ad c ſicut g ad l: dimidium ſcilꝫ ad dimidiam differentiam ſicut totum m ad l totam differentiam.quod eſt propoſitum.

7 ¶Si fuerint tres nũeri in hac medietate diſpoſiti: extremoꝝ/ ⁊ medij ad differẽtiam eandem eſſe proportionem impoſſibile eſt.maiorem ṽo ſiue minorem:poſſibile.



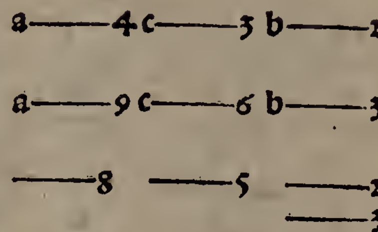
¶Sint tres numeri a b c in hac medietate ꝯſtituti:et a maximus:et differentia a ad b/et b ad c ſit d. dico impoſſibile eſſe eãdem proportiõem a ad c ⁊ b ad d.nam ſi id poſſibile foret:ponat̃ ergo vt ſit a ad c tanq̃ b ad d.ergo ꝑ viceſimãquintam ſecũdi qd̓ fit ex a in d:equũ eſt ei qui fit ex b in c.at ꝑ decimam quartam primi qd̓ fit ex a in d tm̃ eſt q̃tum qd̓ fit ex d in ſe et d in b qui ſint e ⁊ f.ſed per eandem b in c tm̃ eſt q̃tum qd̓ fit ex c in d ⁊ c in ſe qui ſint g ⁊ h.equabũtur ergo adinuicem e f ſimul et g h ſimul.qd̓ eſt impoſſibile.qd̓ ſic oſtẽdo.nam ꝑ ſeptimam ſecũdi f ad e ſicut b ad d.et per eandem h ad g ſicut c ad d.ſed ꝑ nonam ſecũdi ꝓportio b ad d maior eſt q̃ ꝓportio c ad d.igit̃ ⁊ ꝓportio f ad e maior erit ꝓportione h ad g.quare ſi f equet̃ h ꝑ eãdem e erit minor g.quare e ⁊ f non equabũtur g ⁊ h.et ſi f ſit mĩor h ergo ꝑ decimãſeptimãſecundi e etiã erit minor g.quare compoſitus ex e ⁊ f duobus minoribus non equabitur cõpoſito ex g ⁊ h.at ſi f ponit̃ maior h/ et compoſitus e ⁊ f equetur cõpoſito g ⁊ h:ergo per decimãnonam ſcd̓i ꝓportio f ad e minor erit q̃ ꝓportio h ad g: cuiꝰ oppoſitum mõſtratum eſt. cõſtat ergo qd̓ dictũ eſt. ¶Sed extremi ad extremum ꝓportio maior poſſibilis eſt q̃ medij ad differentiam ſi ab vnitate tres ꝯtinue ponant̃ termini qui erũt in hac medietate.et qꝛ extremi ſcꝫ ternarij ad vnitatem eſt ꝓportio tripla:ſed medij binarij ad vnitatem (que differẽtia eſt) ꝓportio dupla:ꝯſtat extremi ad extremum maiorem eſſe proportiõem q̃ medij ad differẽtiam.et ita ſi poſt vnitatem in hac medietate numeri apte diſcõtinue ſumãtur.Poſſibilis eſt etiã extremi ad extremum ꝓportio mĩor q̃ medij ad differẽtiam.nam acceptis quibuſcũq̧ tribus terminis continue poſt vnitatem:maior erit ꝓportio medij ad vnitatem que erit differentia q̃ extremi ad extremum quoꝝ differentia ſemꝑ eſt binarius.

8 ¶Tres numeros in hac medietate inuenire quoꝝ ꝓportionis medij ad differẽtiam: ad proportionem extremorum differentia ſit qualibet data proportione maior.



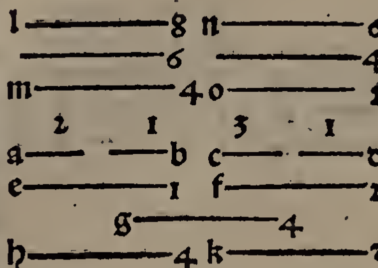
¶Sint a ⁊ b nũeri date ꝓportiõis ⁊ b maior:addo b ad a ⁊ fiat c cui etiã addo b et fiat d.manifeſtum eſt d c a eſſe tres numeros in hac medietate cõſtitutos cũ b ſit cõis differẽtia d ad c ⁊ c ad a:quoꝝ dico differẽtiam ꝓportionis c ad b medij ad differẽtiam:ad ꝓportionem d ad a eſſe data ꝓportione b ad a maiorem.nam ꝓportio c ad a addit ſuꝑ proportionem c ad b proportionem b ad a.et proportio d ad a eſt maior ꝓportione c ad a.addet igit̃ ꝓportio d ad a ſuꝑ proportiõem c ad b maius proportiõe data b ad a.eſt itaq̧ differẽtia ꝓportiõis c ad b ad proportiõem d ad a data proportione maior.

9 ¶Si extremꝰ extremi duplus:erit medius differentie triplus:et cõuertitur.ꝙ ſi alter alterius maius duplo fuerit:erit medius minus triplo differentie:et ecõuerſo.



¶Nam ſi a maximus ſit duplus b mĩmi:erit b duplus differentiaꝝ.quare c ex b ⁊ differẽtia illa cõſtitutus eidem differẽtie erit triplus.et ſi c eſt triplus ad differentiam cũ ꝯſtituat̃ ex illa differẽtia et b: ergo b erit duplus ad differẽtiam.quare a ꝯſtitutus ex b ⁊ dupla differẽtia que equatur b iteꝝ inuenietur duplus ad b.quod eſt primum.et ſi a eſt triplus ad b:idem b equabit̃ vni differentiaꝝ.at b ⁊ vna equalium differentiaꝝ ꝯſtituũt c.igitur c duplus eſt ad differentiam.et ſi c duplus eſt ad differẽtiam erit rurſus a triplus ad b.nam ſi c ſit duplus ad differentiã cũ ſit ꝯſtitutꝰ ex differẽtia ⁊ b:differentia illa equabitur b.ſed b cum equali differẽtia bis ſumpta ꝯſtituit a.igitur a triplus eſt ad b. et vniuerſaliter ſi maximi ad mĩmum proportio maior q̃ dupla inueniatur: erit ſemꝑ mĩmus ad differentiam minor q̃ duplus.igit̃ ⁊ medius ex mĩmo ⁊ differentia cõſtitutus ad differẽtiam minor erit q̃ triplus Et cõuertitur vt in alijs quoq̧ monſtratum eſt.

10 ¶Datis quibuſlibet duabus ꝓportiõibus:ſm vtrãq̧ in Arithmetica medietate tres terminos ordinare:quoꝝ adinuicem differentie ſint equales.



¶Sint minimi termini duarũ datarũ ꝓportionum a b ⁊ c d.et differẽtie illoꝝ ſint e ⁊ f.ſumo iteꝝ g nũerum aliquem quem cõiter numerent differentie e ⁊ f.et ſint numeri ſm quos ipm numerãt h et k. deinde multiplico a ⁊ b per h:⁊ ꝓueniãt l ⁊ m.et multiplico c et d per k et ꝓueniãt n et o. ꝑ ſeptimam ſecũdi l ad m vt a ad b.et n ad o vt c ad d.et differẽtia l ad m eſt g.⁊ ſil'r differẽtia n ad o eſt g.ſi igit̃ g eſt par:ſumo medium inter l et m qui cõſtabit ex m et dimidio g.et mediũ inter n et o qui cõſtabit ex o et dimidio g.et erũt tres termini l ⁊ m cũ ſuo medio ſm ꝓportiõem a ad b/et tres alij n et o cõnũerato eoꝝ medio ſm ꝓportiõem c ad d in arithmetica medietate quoꝝ adinuicem differẽtie ſunt equales

si aũt g esset impar duplãdi essent l/m/n/et o et dupla ad g ꝑ correlariũ septime secũdi ꝓueniret differentia.si ergo inter illos medij sumãtur tam horũ ꝙ illoꝝ differentia ad medium erit g.sicq̈ totum manifestum erit propositum.

¶ Quotlibet numeros ẜm Arithmeticam medietatem sumere: quoꝝ differẽtie dato numero non sint minores:extremoꝝ vero ꝓportio sit date ꝓportioni equalis. 11

¶ Sint a ⁊ b termini date proportionis:et c eoꝝ differentia:et d sit numerus ẜm quem sumendi sunt quotlibet numeri:⁊ e numerus quo non minores debeãt esse differentie.multiplico a ⁊ b ẜm nũerum vno minorem d ⁊ ꝓueniant f et g:quoꝝ differẽtia c toties nũerabit.sumo ergo media ẜm differentias equales c et fiet vt oẽs numeri sint ẜm nũerum d.mltiplicet̃ item c donec ꝓueniat maior e:et fiat hoc ẜm h.ducoq̈ h in f ⁊ g et omnes medios et ꝓueniãt k l ⁊ medij inter illos.manifestũ est extremorum proportionem esse proportioni a ad b equalem:et numerum sumptum esse ẜm d ⁊ differẽtias inter se equales et numero e dato maiores.quod est propositum.

¶ Si sumptis quotlibet nũeris in hac medietate: alij totidem eandem habentes differẽtiam maiores minoribus coniũgant̃:numeros equales ꝓuenire necesse est. 12

¶ Sint a b c d q̃libet numeri in hac medietate quoꝝ a sit mĩmus:⁊ e f g h totidem in hac medietate et e illoꝝ maximus:sintq̈ hoꝝ et illoꝝ equales differẽtie.dico a et e simul equari b et f et reliquis hoc modo sequẽtibus.nam quia a ⁊ e sunt circũpositi b ⁊ f et equales per hypothesim differẽtie:ergo per tertiam primi a et e simul equãtur b et f.et hunc modum de reliquis argumentare.

¶ Numeros quotcunq̈ in hac medietate datos coaceruare. 13

¶ Hec demõstrat aggregatoꝝ summam reperire:quã nõnulli ꝓgressiõem vocant.si enĩ sunt in nũero pari vt a b c d.e f g h ꝙ igit̃ ꝑ precedentem a h equãtur b g et c f et d e ẜm seriei medietatem.si ergo in coaceruatum ex a ⁊ h duob⁹ extremis ducat̃ totius seriei medietas ꝓueniet summa totalis ex oĩbus coaceruata.At si numerus eoꝝ sit impar vt a b c d e f g erit vnus eoꝝ medius vt d.et eius ad extremos a et g eadem erit differentia.quare per scdãm primi est medietas a et g/et similiter medietas b ⁊ f/et medietas c ⁊ e.numerus igitur seriei oĩm in ip̃m ductus oĩm summam cõficit.quod est propositum.

¶ Si q̃tlibet nũeri huius medietatis alijs totidẽ siue eq̃libus siue in eadem medietate sumptis minores mioribus addãtur:ꝯpositi quoq̈ ẜm eãdem medietatẽ disponẽtur. 14

¶ Nam siue equales equalibus addãtur siue hoc modo nũeri quicũq̈ totidem alijs in eadem medietate cõstitutis:quia equalib⁹ differẽtijs equales differẽtie addẽtur et tote differẽtie adinuicem erũt equales.quare per diffinitionem compositi erunt in hac medietate ꝯstituti.quod est propositum.

¶ Si equales totidem auferant̃ siue ip̃i ab eq̃libus substrahãtur:residuum in eadem medietate inuenietur. 15

¶ Nam equalibus de quibuslibet eoꝝ demptis erũt eedem residuoꝝ que ⁊ totoꝝ differẽtie idẽtidem quibuslibet eoꝝ ab equalibus demptis eedem que substracteꝝ manebunt differentie.igitur per diffinitionem residua erunt in arithmetica proportione.quod intendebatur.

¶ Si vero de eisdem alii in eadem medietate dati minores a minoribus tollãtur:residui vel erunt equales vel eiusdem medietatis rationem suscipient. 16

¶ Hec quodãmodo decimequarte et decimequĩte ꝯuersa est.nam datis a b c in hac medietate maioribus et d e f minoribus:quoꝝ ad primos differentie sint equales:substractis d e f ab a b c.residui erũt equales:differentie a ad d.quare adiuicem equales.at si numeri sumpti vt g h k non hẽant singuli ad singulos a b c equalem differẽtiam.q2 detractorum ⁊ totorum eq̃les sunt differentie:erũt ⁊ residuoꝝ equales differentie.et cũ residua nõ sint equalia:inter eos erit hec medietas.quod est propositum.

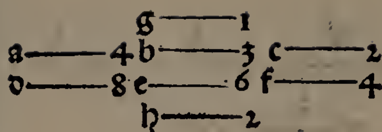
¶ Si quotlibet numeri huius medietatis ẜm eundem nũerum vel multiplicentur vel diuidãtur:erunt ⁊ ꝓducta ⁊ diuidentia in hac medietate eodem ordine continuata. 17

¶ Sint dati quotlibet numeri in hac medietate:vt a b c qui multiplicẽtur ꝑ e et ꝓueniant f g h ⁊ qui diuidãtur per e:et ꝓueniant k l m.dico ꝓducta f g h et diuidẽtia k l m eodem ordine in hac medietate ꝯtinuata.nam q2 multiplicatorum a b c differentie sunt equales:ergo per correlariũ septime secundi et productorum.et etiam per idem quoties diuidentia k l m numerabunt a b c:⁊ toties differẽtie numerabunt differentias et eodem ordine.est ergo notum quod proponitur.

¶ Datum nũerũ in quotlibet partes que arithmetica medietate se excedãt diuidere. 18

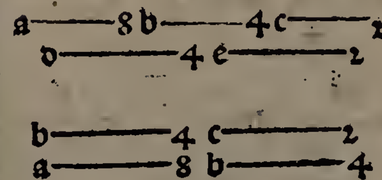
¶ Sit numerus diuidẽdus a:et b nũerus ẜm quem ꝓponit̃ diuidi.Inuenio per decimãtertiã huius numerum ex oĩbus ab vnitate ad b coaceruatum qui sit c.et qui sit vt partes ab ip̃o denoĩate.et resoluas si vis a in cõsimiles partes:dehinc resolutum diuidas per c et reuertetur numerus ẜm a qui sit d:per quem multiplica oẽs numeros ab vnitate ad b qui sunt in hac medietate vt notum est et ꝓueniãt f g h k partes denoĩate ab c que per precedentem erũt in hac medietate.et per nonã primi manifestũ est eas cõstituere a.et sunt sumpte ẜm numerum b.effectum est igitur propositum.

¶ Si inter numeros ꝓportiõales medii ẜm hanc medietatem designẽtur: erit extremorum ad illos proportio vna. 19



¶ Sint a b c numeri in hac medietate cõstituti ⁊ siliter totidem d e f: sitq; a ad c sicut d ad f. dico a ad b vt d ad e et b ad c vt e ad f. nam si a c ⁊ d f sint equales: constat propositũ. si non: sint ergo d f maiores et a c minores. quia eni que ꝓportio d ad f totus ad totum: ea est a ad c detracti ad detractum: ergo ꝑ quitam secũdi differẽtia d ad f ad differentiam a ad c residuum ad residuum: sicut d ad f totũ ad totũ quare medietas differẽtie d ad f que sit h ad dimidiũ differẽtie a ad c que sit g per correlariũ decime quarte secundi sicut d ad f. et cum que proportio d ad f ea sit a ad c: ergo ꝑmutatim d ad a sicut f ad c. cum itaq; f ad c sicut h ad g: ergo per idem correlariũ e ad b sicut d ad a. quare ꝑmutatim d ad e sicut a ad b. et consiliter ꝓbabis f ad e sicut c ad b aut ecõtra. quod est propositum.

20 ¶ Si in geometrica medietate tres numeri statuant: erit que maximi ad medium: ea differentie ipsorum ad differentiam medii ad mimum proportio.



¶ Sint a b c tres numeri in geometrica medietate dispositi ꝑ diffinitiõem que ꝓportio a ad b ea est b ad c. et sit dr̃ia a ad b nũerus d. et differẽtia b ad c medij ad mimũ nũerus e. dico eãdẽ eẽ ꝓportiõem a ad b et d ad e. capio enĩ b et vt totum et vt detractum. et q̄z que ꝓportio a ad b totiꝰ ad totum: ea est b ad c detracti ad detractum. igitur q̄ ꝓportio a ad b totius ad totũ ⁊ maximi ad medium: ea est dr̃ie a ad b ad differẽtiam b ad c per quitam secundi residui ad residuum. quod est propositum.

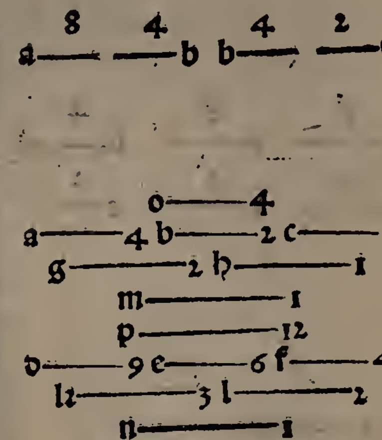
21 ¶ In hac medietate quod sub extremis cõtinetur: equale est quadrato medii.

¶ Hec ex diffinitione et vicesimasexta secundi statim cognoscitur.

22 ¶ In eadem medietate duo extremi ꝯiũcti: maius sunt q̄ꝫ medius duplicatus.

¶ Hec itidem statim cognoscitur per vicesimãquartam secundi: sumpto medio ꝓ secundo ⁊ tertio.

23 ¶ In eadem medietate quãto maximi ad medium maior est proportio: tanto etiam maximi ⁊ minimi ad duplum medii maior erit proportio.



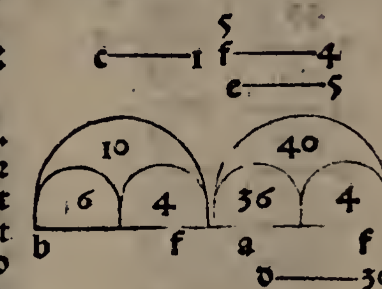
¶ Sint a b c ꝯtinue proportiõales: et d e f idẽtidem cõtinue proportiõales sed in maiore ꝓportione. dico ꝙ quãto maior est ꝓportio a ad b q̄ꝫ d ad e: tãto maiorem esse proportiõem a et c ad duplum b q̄ꝫ ꝓportio e et f ad duplum e. sit eni g differẽtia a ad b/ et h differentia b ad c/ siliter k differentia d ad e/ et l differẽtia e ad f. et quo g excedit h sit m/ quo vero k excedit l sit n. quia enĩ maior est ꝓportio a ad b q̄ꝫ d ad e: ergo ꝑ duodecimam secũdi a ad d totius ad totum maior est ꝓportio q̄ꝫ b ad e detracti ad detractum. ergo per decimãtertiam eiusdem g ad k residui ad residuum maior est ꝓportio q̄ꝫ a ad d totius ad totum: quare multo fortius q̄ꝫ b ad e detracti ad detractum. q̄z igitur g ad k maior est ꝓportio q̄ꝫ b ad e: igitur ꝑ duodecimam eiusdẽ g ad b maior ꝓportio q̄ꝫ k ad e. quare per vndecimam eiusdem b ad g mĩor ꝓportio q̄ꝫ e ad k. et per vicesimam huius g ad h maior est ꝓportio q̄ꝫ k ad l. nam g ad h vt a ad b/ et k ad l vt d ad e. quare eadem argumẽtatiõe qua pauloante g ad m mĩor ꝓportio q̄ꝫ k ad n. quare per quintam quinti erit b ad m minor ꝓportio q̄ꝫ e ad n. per eandem igitur dupli b vt o ad m minor ꝓportio q̄ꝫ dupli e vt p ad n. et q̄z a et c supant duplum b q̄ꝫtum est m: et siliter cõpositus ex d ⁊ f excedit p duplum e q̄ꝫtum est n: vt facile ex precedente cognoscas. et ꝓportio p ad n maior ꝓportione o ad m. igitur per scd̃am partem decimequite scd̃i p ⁊ n ad p mĩor ꝓportio q̄ꝫ o ⁊ m ad o. igitur d ⁊ f simul ad p proportio minor q̄ꝫ a et c simul ad o. quod est propositum.

16 8 4
a—4 b—2 c—1
d—12 e—6 f—3

24 ¶ Si quotlibet numeris in hac medietate sumptis totidem alii eiusdem ꝓportionis maiores maioribus addãtur: compositi quoq; in hac medietate inueniẽtur dispositi.

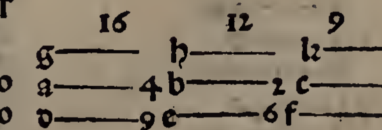
¶ Nam si que ꝓportio a ad b et b ad c: ea sit d ad e et e ad f. igitur ꝑmutatim que proportio a ad d: ea est b ad e ⁊ c ad f. igitur per vicesimam secũdi que proportio a ad b: ea erit compositi ex a d ad ꝯpositũ b e. et compositi b e ad compositum c f. quod est propositum.

25 ¶ Si dispositis aliquot numeris in hac medietate numeri equales singulis addãtur: erit inter compositorum maiores proportio maior.

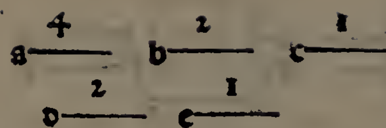


¶ Sint a b c in geometrica medietate dispositi: et d e eorum differẽtie: et f numerus singulis addẽdus. quia igit̃ quo abundat f a sup f b est d. et quo abundat f b sup f c est e. et per nonam secũdi f ad d mĩor est ꝓportio q̄ꝫ f ad e. et per vicesimam huiꝰ permutatim argumentando a ad d vt b ad e: per idem erit f a ad e maior ꝓportio q̄ꝫ b f ad e. itidem ⁊ ꝓportio b f ad e maior q̄ꝫ c f ad e. et quia d ad e vt a ad b vt dictum est: et differẽtia a f ad b f est d. et differẽtia b f ad c f est e: erit ꝓportio a f ad b f maior q̄ꝫ b f ad c f. et quãto differẽtia fuerit maior: tanto dr̃ia vnius ꝓportionis sup differẽtiam alterius erit maior.

26 ¶ Si quotlibet numeris in hac medietate datis: totidem alii in eadem quidẽ medietate sed non s̃m eandem proportionem sumpti: maiores minoribus addantur: inter compositorum maiores: maiorem esse proportionem conueniet.

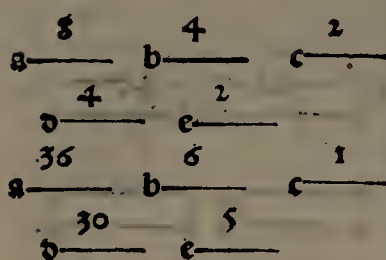


¶ Sint ꝯtinue ꝓportiõales a b c ⁊ siliter d e f: sed in mĩori ꝓportiõe. dico ꝙ a d ad b e maior ꝓportio q̄ꝫ b e ad c f. Sit eni qđ ex a in f ꝓducit̃/ g. et qđ ex b in e/ h. et qđ ex d in c: k. per primam quĩti ꝓportio g ad h est dr̃ia ꝓportiõis a ad b sup ꝓportiõem e ad f. sed ⁊ ꝓportio h ad k est per eãdem dr̃ia ꝓportionis b ad c sup proportiõem d ad e. quare sicut g ad h: ita h ad k. quare per vicesimãscd̃am huiꝰ g et k plus sunt q̄ꝫ duplũ h. et q̄z qđ ex a in c ⁊ qđ ex d in f sũt q̄ꝫtũ qđ ex b in se ⁊ e in se ꝑ vicesimãsextam scd̃i erũt ergo eadez cũ g ⁊ k maius q̄ꝫ quadrata b ⁊ e cum duplo h. maiꝰ ḡ qđ ex a d in c f q̄ꝫ qđ ex b e in se. et ideo maior ꝓportio a d ad b e q̄ꝫ que est b e ad c f ꝑ vicesimãseptimam secũdi. qđ est propositum.



Tribus numeris in hac medietate sumptis: maximi ad minimũ et medii ad alteram differentiarum eandem esse proportionem impossibile est. 27

Sint a b c tres nũeri in hac medietate: ⁊ differentie eorꝫ d et e. dico impossibile eẽ eãdẽ ꝓportiõem a ad c ⁊ b ad d vel b ad e. nam si esset a ad c sicut b ad e: ergo pmutatim esset a ad b sicut c ad e. et qꝛ per vicesimam huius b ad c sicut d ad e erit pmutatim b ad d sicut c ad e. quare que ꝓportio a ad b ea erit b ad d: sed a ẽ maior d. igitur per quartam secũdi b maior d. igitur que ꝓportio a ad b maiorem eius portionem erit b maioris portionis ad minorem. qđ per vndecimã quinti est impossibile ⁊ ꝓpositum.

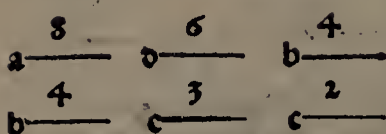


Trium numerorum huius medietatis quo maximi ad minimũ maior est proportio: eo medii ad quãlibet differentiarum proportio minor. 28

Sit hypothesis vt prius. hoc enĩ ideo est ꝙ quãto a ad c maior: tanto differentia b ad c erit maior quare tanto numerus e maior. et ideo ꝓportio b ad e minor. siṁr quanto a ad c maior tanto etiã a ad b maior et quãto a ad b maior tanto d differentia maior. quãto aũt d differẽtia maior: tãto b ad ipam proportio minor. quod est propositum.

Numeros quotlibet in geometrica medietate ꝯtinuare: quorꝫ extremorꝫ ꝓportio non sit data ꝓportiõe maior: minorum ꝟo differentia non sit dato numero minor. 29

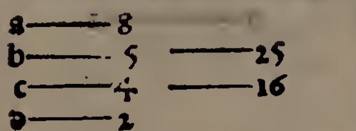
Diuido per sexagesimãnonam noni ꝓportiõem datam in ꝓportiões quarꝫ quotlibet sint equales: et si differẽtia minorum sit equalis dato numero aut maior: effectum est propositum. si aũt minorum differentia sit dato numero minor. duco datum numerum in quẽlibet numerum illarꝫ proportionum et factum apparebit propositum.



Si inter numeros eiusdem medietatis: ꝟm arithmeticam medietatem medii statuantur: illi quoqꝫ in geometrica medietate disponẽtur. 30

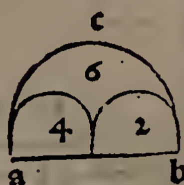
Sint a b c cõtinue in hac medietate dispositi: sitqꝫ d medius inter a ⁊ b: et e inter b ⁊ c ꝟm arithmeticam medietatem. dico que ꝓportio a ad b: eam esse d ad e. nam p decimãnonam huius vt a ad d: ita b ad e. igitur permutatim vt a ad b: ita d ad e. quod est propositum.

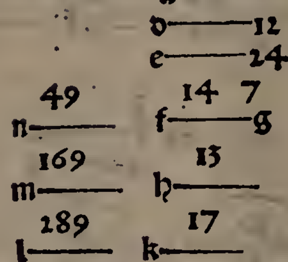
Si inter duos numeros medij duo proponãtur alter in arithmetica ⁊ alter in geometrica medietate: qui est scđm arithmeticam reliquo tanto amplius potest q̃tum est quadratum differentie ipius ad alterutrum extremorum. 31



Et inter a ⁊ d sint b c duo medij: scꝫ b in arithmetica medietate/ ⁊ c in geometrica. dico b amplius tanto posse sup c q̃tũ est quadratum differẽtie b ad a aut b ad d: qđ idem est. nam p vicesimãprimam huius qđ fit ex a in d tm̃ est q̃tum quadratum c. at p tertiã hui⁹ quadratum b addit sup id qđ fit ex a in d q̃tum quadratum differẽtie a ad b. igitur ⁊ tm̃ addet sup quadratum c. quod est propositum.

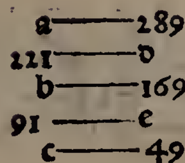
Tres numeros in arithmetica medietate reperire: inter quorꝫ binos ⁊ binos scđm geometricam medietatem medios assignare cõtingat. 32





Sint a ⁊ b duo nũeri pares: et b aut equalis aut numerãs a. et ꝯpositus ex a ⁊ b sit c cuius duplus sit d. ducaturqꝫ a in c ⁊ ꝓueniat e. quia p primam septimi cõpositus ex a et c est par: et p duodecimam eiusdẽ e est par. ergo p sextam eiusdẽ si ꝯposit⁹ ille detrahaꝛ ab c: relinqueꝛ par. sit ergo par relictus f. et eius medietas g. et compositus ex g et c sit h. itemqꝫ h et a componãt k sintqꝫ l m n quadrati k h g quos dico esse numeros quales querimus. nam p decimãquintam primi l quadratum k addit sup m quadratum h: q̃tum est quadratum a. et qđ fit ex h bis in a. hoc est q̃tum quadratum a ⁊ qđ fit ex a in d et f. et qđ fit ex a in se et in f minuit ex eo qđ fit ex a in e q̃tum est qđ fit ex a in c. et qđ fit ex a in d est q̃tum qđ fit ex b in c. et qꝛ qđ ex a et b in e equaꝛ ei qđ ex c in e: erit qđ addit quadratum k sup quadratum h minus eo qđ ex c in e q̃tum est qđ fit ex c in g. et ex eodem patere potest ꝙ quadratum h addit sup quadratum g q̃tũ qđ fit ex c in se ⁊ in f: qđ min⁹ est eo qđ fit ex c in e q̃tum est qđ fit ex c in a. quare quanto l abundat sup m tanto m abundat sup n. quare quadrati l m n sunt in arithmetica medietate constituti. et p correlarium quarte sexti inter l et m est vnus medius ꝓportiõalis: ⁊ siṁr inter m ⁊ n. factum est ergo propositnm.

Si sumptis tribus terminis in arithmetica medietate medij inter illos ꝟm geometricam medietatem statuãtur: inter quadratos illorꝫ quadratũ medii aliorꝫ in arithmetica medietate constare necesse est. 33



Sint a b c numeri in arithmetica medietate cõstituti p precedentem inuẽti inter quos sint d e ꝟm geometricam medietatem. dico quadratũ medij b eẽ in arithmetica medietate inꝛ quadrata mediorꝫ d ⁊ e. nam qꝛ quadratum d p vicesimãsextam secũdi est q̃tum qđ fit ex b in a. ꝑ per nonam primi quadratum d addet sup quadratum b q̃tum qđ fit ex b in dr̃iam suam ad a. ⁊ ꝯsiṁr quadratum b addet sup quadratum e q̃tum qđ fit ex b in dr̃iam suam ad c. sed b ad a ⁊ b ad c equalis est differẽtia: igitur quadrata numerorum d b e: sunt in arithmetica medietate. quod est propositum.

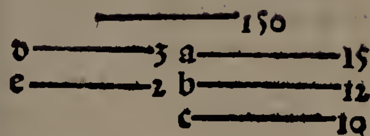
Ordiatis tribus terminis in harmonica medietate: erit maximi ad mediũ: q̃ medij ad minimum maior proportio. 34

¶Sint a b c tres nūeri in harmonica medietate ꝯstituti:sitqꝫ a maximus.dico a ad b maiorem esse ꝓportionem q̄ b ad c.Sit enī d differētia a ad b:et e differētia b ad c.erit enī per diffinitionem d ad e sicut a ad c.et per nonam secūdi a ad c maior ꝓportio q̄ a ad b.quare a ad b minor proportio q̄ d ad e totius scʒ ad totū minor ꝓportio q̄ detracti ad detractum. ergo ꝑ decimāquartam secūdi b ad c residui ad residuum minor ꝓportio q̄ a ad b totius ad totum.quod est ꝓpositum.

35 ¶In eadem medietate duo extremi ꝯiūcti:maius medio duplicato efficient.

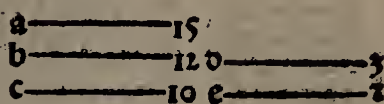
¶Nam per scdam secūdi differētia maiorum est maior q̄ differētia minorum.sumpto ergo numero minore maximo extremoꝝ qui addat suꝑ medinm q̄tum medium suꝑ mīmum:ꝑ scdam ꝑprimi ille cū mīmo equabunt medio duplicato.igitur per cōem sciētiam maximus extremorum qui eo est nūerus maior cū eodem mīmo constituet numerum medio duplicato maiorem.quod est propositum.

36 ¶In eadem medietate qd̄ cōtinetur sub extremis est q̄tum quadratum medij cū eo quod fit ex differentia in differentiam.



¶Sint vt prius a b c tres numeri in hac medietate cōstituti:et coꝝ differētie d ꝛ e. dico qd̄ fit ex c in a esse tm̄ q̄tum quod fit ex b in se cū eo quod fit ex d in e.nam qd̄ fit ex c in a est tm̄ q̄tum quod fit ex c in b ꝛ in d per nonam primi.et ꝑ vicesimāquintam secūdi qd̄ fit ex c in d est q̄tum qd̄ fit ex e in a.et qd̄ fit ex e in a q̄tum qd̄ ex e in b et d.et quod ex e ꝛ c in b per decimam primi q̄tum quod ex b in se.ergo quod fit ex c in a est q̄tum qd̄ b in se et e in d.quod ꝓponitur.

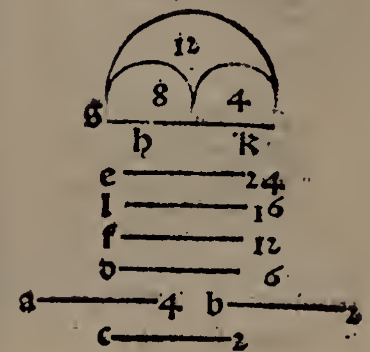
37 ¶In eadem quoqꝫ medietate quod fit ex medio in extremos: duplum est eius quod continetur sub eisdem.



¶Nam quod fit ex b in a est q̄tum quod ex c in a et e in a per decimam primi.et ꝙ ex e in a q̄tū quod ex d in c per vicesimāquintam secūdi ꝛ ꝑ decimam primi iteꝝ quod ex d in c cū eo quod ex b in c q̄tum quod ex a in c.quare q̄tum quod ex c in a.est itaqꝫ quod astruitur notum.

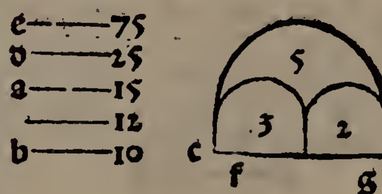
38 ¶Inter vnitatem ꝛ aliquem numerum:siue inter numeros in sua ꝓportiōe mīmos: scd̄m harmonicam medietatem non est assignare medium.

¶Inter numerum ꝛ vnitatem non assignabit.nam cū que ꝓportio numeri dati ad vnitatem ea esset differētie numeri dati ad medium ad differētiam medij ad vnitatem.et drīa numeri dati ad medium minor eēt numero dato:oporteret medij numeri dati ꝛ vnitatis ad vnitatem:minorem eē differētiam vnitate.de numeris aūt in sua ꝓportiōe mīmis idem statim patet.nam cum eadem eēt differentie ad differentiam que illoꝝ nūerorū adinuicem ꝓportio ꝛ eoꝝ differentie sint minores.illi ergo non essent in sua proportione minimi.quod est ꝯtra hypothesim.



39 ¶Scd̄m datam proportiōem:musicam inuenire medietatem.

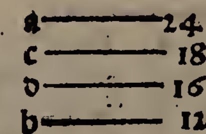
¶Sint a ꝛ b extrema date proportiōis:et c differētia eoꝝ:et cōpositus ex eis sit d.ducātur igit a et b in d et ꝓueniāt e ꝛ f.sitqꝫ eoꝝ differētia g.quā ꝑ nonam primi d nūerabit ꝑm c.et quia d est tanq̄ a ꝛ b ergo c duct⁹ in a ꝛ in b facit g.et eo quod fit ex c in a quod sit h:dempto de g remaneat k:quē ꝓducet b in c.sumatur ergo l medius inter e ꝛ f cuius differentia ad e sit h: certum est differentiam eius ad f esse k.et quia per septimam secūdi h ad k tanq̄ a ad b.et per octauam eiusdem etiam e ad f tanq̄ a ad b.constat ergo per diffinitionem factum esse propositum.



40 ¶Terminis extremis ꝓpositis:medium inter eos ꝑm harmonicam medietatē reꝑire.

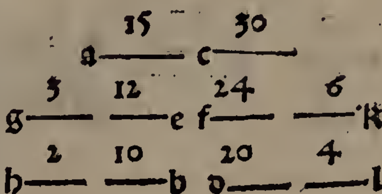
¶Sint a ꝛ b extremi harmonice medietatis quoꝝ iubear medium inuenire . capio eoꝝ differentiam que sit c:et cōpositum ex ipsis qui sit d.deinde duco a in c et ꝓueniat e qui diuidatur ꝑ b:et diuidens sit f.eritqꝫ per cōuersam vicesimequinte secundi que proportio d ad a eadem c ad f.dempto ergo f de c remaneat g.eritqꝫ f ad g sicut a ad b.quod ostēdo.nam qꝛ sicut d ad a:ita c ad f.ergo ꝑmutatim d ad c totus ad totum vt a ad f detractus ad detractum.quare iteꝝ vt a ad f:ita b ad g residuus ad residuū. ergo permutatim a ad b sicut f ad g.sumo igitur inter a ꝛ b medium numerum cui⁹ differētia ad a sit f.et quia relinquetur differentia eius ad b esse g:per diffinitionem cōstat factum esse propositum.

41 ¶Si inter duos numeros duo statuantur medii:alter ꝑm arithmeticam ꝛ alter scd̄m harmonicam medietatem:qui ꝑm arithmeticam maior est ꝛ q̄ maximi ad ip̄m eadem alterius ad minimum proportio.



¶Sint extremi a b.et medi⁹ ꝑm arithmeticam medietatem c.et ꝑm harmonicam d. dico c eē maiorē d:et eam eē ꝓportiōem a ad c q̄ d ad b.ꝙ aūt c maior sit d:statim patet ꝙ ꝑ diffinitiōem ea sit ꝓportio drīe a ad d ad drīam d ad b que a ad b.sed drīa a ad c ꝛ c ad b equātur:ergo maior erit drīa a ad d q̄ a ad c.et ꝙ ea sit ꝓportio a ad c que d ad b patet.nam ꝑ quintam hui⁹ c est medietas a ꝛ b siml' iunctorum et per tricesimamseptimam huius quod ex d in a ꝛ in b ꝓducitur duplum est ad id quod fit ex a in b. igitur qd̄ fit ex d in c dimidium per scdam primi a ꝛ b:equabitur ei qd̄ fit ex a in b.igitur ꝑ vicesimam quintam secundi a c d b sunt proportionales vt dicitur.quod est propositum.

42 ¶Si inter numeros proportionales medii ꝑm harmonicam medietatem statuātur: extremorum ad illos erit proportio vna.



¶Sit ꝓportio a ad b sicut c ad d.et sit e medius harmonice inter a ꝛ b.et similiter f medius inter c ꝛ d. dico a ad e sicut c ad f.Sint enī drīe g h et k l.qꝛ q̄ ꝓportio a ad b ea est c ad d.et q̄ a ad b ea est g ad h. et que c ad d ea ē k ad l.idcirco erit g ad h vt k ad l.quare ꝑmutatim g ad k vt h ad l. quare ꝑ vicesimā

fecũdi g h ad k l ſicut g ad k. et iterũ quia ꝑmutatim a ad c ſicut b ad d: erit per idem a ad c ſicut g h ad k l quare ſicut g ad k. et quia a ⁊ c ſũt tota et g ⁊ k detracta: erit ergo e ad f reſiduus ad reſiduum ꝑ quintam ſecundi vt a ad c totus ad totum. quare ꝑmutatim a ad e ſicut c ad f. quod eſt propoſitum.

e—48 g—36 h—32 f—24

a—24 c—18 d—16 b—12

¶ Si inter duos numeros alij duo medij ꝓportionaliter ſumantur: ſumaturq; maior ſm arithmeticam medietatẽ: ſumetur minor ſm harmonicam. quod ſi minor ſm harmonicam: maior ſm arithmeticam ſumetur. 43

¶ Sit enim a ad c ſicut d ad b. et c maior ſit medius ſm arithmeticam medietatem inter a ⁊ b. dico d eſſe mediũ ſm harmonicam medietatẽ inter a ⁊ b. et ↄuertitur. Sumo enĩ ꝑ quadrageſimãprimã huius e ⁊ f q̃ ſint in ꝓportiõe a ad b. inter quos ſit g ſm arithmeticam medietatẽ medius ⁊ h ſm harmonicam. quia igitur ꝑ quadrageſimãprimam e ad g ſicut h ad f. et ꝑ decimãnonam huius e ad g ſicut a ad c. quare cũ d ad b vt a ad c: et h ad f vt e ad g. erit ergo h ad f vt d ad b. ſed ⁊ quia h eſt medius harmonicus ad quem f extremum habet eam proportiõem q̃ b ad d: facile ꝑ precedentem inuenies d eẽ in harmonica medietate inter a et b. cõuerſum aũt facile ꝓbabis per quadrageſimãprimã huius oſtẽdẽdo mediũ arithmetice medietatis quẽcunq; inuentum: eſſe equalem c maiori.

n—189 o—147 t—135 p—105 q—63 r—35 s—21

f—27 g—21 h—15 k—9 m—5 l—3

a—9 d—7 c—5 e—3 b—1

¶ Numeros quotlibet in arithmetica medietate ↄtinuare: inter quorũ binos ⁊ binos ſm harmonicam medietatem poſſint aſſignari medij. 44

¶ Ut ſi iubear continuare tres numeros in arithmetica medietate inter quorũ binos ⁊ binos poſſint aſſignari in harmonica medietate medij. capio a b c totidem numeros in arithmetica medietate cõſtitutos: quorũ differẽtia ſit par: ⁊ inter illos ſumãtur medij in eadem medietate qui ſint d ⁊ e. et multiplicentur oẽs per e. et ꝓueniant f/g/h/k/l qui ꝑ decimãſeptimam huius erũt in arithmetica medietate. ducaturq; iterũ c in b ⁊ fiat m. et quia ꝑ ſeptimam ſecũdi que ꝓportio c ad e ea eſt h ad k. et ꝑ octauam eiuſdem iterũ q̃ c ad e ea eſt m ad l. et inter h ⁊ l numerus k maior eſt in arithmetica medietate medius. igitur ꝑ precedẽtem m eſt medius inter h ⁊ l in harmonica medietate. multiplicẽtur item oẽs hi per d: et ꝓueniãt n/o/p/q/r/s et erũt vt prius n/o/p/q/s in arithmetica medietate: et r inter p ⁊ s in harmonica medietate. ducatur item a in h ⁊ ꝓueniat t. et eadem rõne qua prius mõſtrabis ipm eẽ mediũ in harmonica medietate per precedentem inter n ⁊ p. ſicq; erũt ↄtinuati vt ꝓpoſitum eſt in arithmetica medietate numeri/ factũq; apparebit propoſitum. ¶ Et ſi de pluribus ageretur: quoties erit apponendus medius harmonicus: toties facienda erit modo predicto multiplicatio.

a—8 c—6 b—4 d—3

¶ Duobus numeris ad alios duos proportionalibus: vtrorũq; alterũ inter reliquos medium eſſe in harmonica medietate: eſt impoſſibile. 45

¶ Ut ſit a ad b ſicut c ad d: dico c nõ eẽ medium ſm medietatem harmonicam inter a ⁊ b: neq; b inter c et d. ſi enĩ poſſibile ſit: eſto ergo c in harmonica medietate inter a ⁊ b: et b inter c ⁊ d. quia enĩ a ad b ſicut c ad d. et inter a ⁊ b et c ⁊ d numeros quidẽ ꝓportionales: ↄſtituũtur c ⁊ b medij ſm medietatem harmonicam. igitur per quadrageſimamſcdam huius erit proportio a ad c ſicut c ad b maximi ſcʒ ad medium que medij ad mĩmum. quod per triceſimãquartam huius eſt impoſſibile et propoſitum.

d—12
6 a— 4 b— 2 c—
2 e— 3 f— 6 g—
4 h— 6 k— 12 l—
m—8

¶ Si tres numeri in arithmetica medietate ſumpti aliquem numerum numerent: illi ſm quos eum numerant in ordine harmonice medietatis inuenientur. 46

¶ Sint a b c in medietate arithmetica ſumpti: numerẽtq; d ſm e f g. dico e f g eſſe in harmonica medietate ordinatos. Sint enĩ tres dupli eorũ h k l qui et iidem erũt vt patebit in harmonica medietate et ſit m inter h ⁊ l in arithmetica medietate medius. quia enĩ a in e ⁊ c in g cõſtituũt d: ergo ꝑ viceſimam quintam ſecundi que ꝓportio a ad c ea eſt g ad e: et que g ad e per quintam ſecũdi ea eſt l ad h. ſed per decimãnonam huius l ad m ſicut a ad b. et quia per eãdẽ viceſimãquintam ſecũdi a ad b ſicut f ad e: erit ob hoc l ad m ſicut k ad h. ſed ꝑ quadrageſimãtertiam huius k eſt medius harmonice inter l ⁊ h. igitur et f harmonice medius inter g ⁊ e. quod eſt propoſitum.

e—24
a—8 f—3
b—6 g—4
c—4 h—6
d—2 k—12

¶ Numeros quattuor perſcrutari: quorũ ſecundus inter primum ⁊ tertium: ⁊ tertius inter ſecundum ⁊ quartum in harmonica medietate cõſtituatur. 47

¶ Sint a b c d quattuor numeri in arithmetica medietate cõſtituti qui numerent eũdem numerum e ſm f/g/h/k. dico f g h k eſſe quattuor numeros quorũ g ſecũdus eſt in harmonica medietate inter f ⁊ h primum ⁊ tertiũ. et h tertius itidem eẽ in harmonica medietate inter g ⁊ k ſcdm ⁊ quartum. nam quia tres nũeri a b c in arithmetica medietate ↄſtituti numerant e ſm f/g/h: ergo per precedẽtem f/g/h ſunt in harmonica medietate. et per idem quia b/c/d tres alij arithmetice medietatis numerant eundem e ſm g/h/k. ergo g h k ſunt in harmonica medietate. eſt igitur vt ꝓponebatur g medius harmonice inter a et h: et h itidem medius harmonice inter g ⁊ k. quod eſt propoſitum.

d—24
8 a— 4 b— 2 c—
3 e— 6 f— 12 g—

¶ Si tres numeri geometrice medietatis aliquem numerum numerent: et illos ſcdm quos numerant in eadem inueniri neceſſe eſt. 48

¶ Ut ſint a b c in geometrica medietate ↄſtituti q̃ nũerent d ſm e/f/g: dico g/f/e in eadem ꝓportione reperiri. nam per viceſimãquintam ſecundi vt a ad b ita f ad e: et per eandem vt b ad c ita g ad f. quare erit e ad f vt f ad g: et f in geometrica mediate medius. quod eſt propoſitum.

¶ Si tres numeri muſice medietatis aliquem numerent: illi ſm quos eum numerant in arithmetica medietate diſponẽtur. 49

¶ Hec eſt ꝯuerſa quadrageſimeſexte. ſint ergo a b c in harmonica medietate diſpoſiti qui numerent d ẜm e f g. dico e f g eſſe in arithmetica medietate conſtitutos. Sumo h k l duplos ad a b c qui ſiſr erũt in harmonica medietate ⁊ in medium ẜm arithmeticam medietatem inter h ⁊ l. eritꝙ ꝑ quadrageſimãprimam huius h ad m ſicut k ad l. quare ſicut g ad f adiuuãte viceſimaquĩta ſecundi. ſed ⁊ per eãdem viceſimãquitam ſcđi cognoſcet g ad e ſicut h ad l. ſed h ad m medium: ſicut g ad f ſuũ medium et m ad l vt f ad e. igitur per decimãnonam huius f medius erit in medietate arithmetica inter g ⁊ e. quod eſt propoſitum.

d 12
a 6 b 4 c 3
e 2 f 3 g 4
h 12 k 8 l 6
m 9

50 ¶ Quotlibet nũeros in geometrica medietate ẜm datam ꝓportiõem ꝯtinuare: inter quoꝝ ſingulos ẜm harmonicam medietatem medios aſſignare ſit poſſibile.

¶ Per triceſimãnonam huiꝰ ſumãtur ẜm datam proportiõem a/b/c tres numeri in harmonica medietate: et ſint d e termini ꝓportionis a ad c. et ducat d in oẽs illos ⁊ ꝓueniant f g h qui ꝑ ſeptimam ſecũdi erunt in eadẽ medietate ꝙ per correlarium eiuſdem ſeptime differẽtie f ad g ⁊ g ad h ſint eque multiplices ad d e. ducatꝙ e in c ⁊ ꝓueniat k. eritꝙ ꝑ octauam ſecũdi f ad h ſicut h ad k. Itẽ ducatur e in b ⁊ ꝓueniat l. eritꝙ l ad k ſicut b ad c. quare l harmonice mediꝰ inter h ⁊ k. ſicꝙ habes duos ẜm datam ꝓportiõem geometrice ꝯtinuatos: inter quos ⁊ duo medij harmonice medietatis ſunt inuẽti. Qꝫ ſi plures deſideras duc d in oẽs inuẽtos ⁊ e in duos extremos ⁊ habebis tres ĩ medietate geometrica ꝯtinuatos ⁊ inter binorũ ſingulos ea rõne qua prius medios in harmonica medietate ſumptos et hoc quoꝙ pacto quotquot voles inuenies.

f 12
g 8
h 6
l 4
k 3
a 6 b 4 c 3
d 2 e 1

24
16
12
8
6
4
3

51 ¶ Tres numeros in harmonica medietate diſponere: ita vt iter binos ⁊ binos medii ẜm medietatem geometricam cõſiſtant.

¶ Scđm exigentiam treceſimeſecunde huius inueniãtur a b c tres numeri in arithmetica medietate ꝯſtituti: inter quos ſint d ⁊ e in geometrica medietate. et ſit f numerus quẽ oẽs numerant: numerẽtꝙ eum ẜm g h k l m. et patet ꝑ quadrageſimãſextam huius g/k/m eẽ in harmonica medietate: ſed ⁊ per quadrageſimamoctauam huiꝰ h inter g ⁊ k: et l inter k ⁊ m erũt in geometrica medietate. ſicꝙ patet effectum propoſitum.

f
a 289
d 221
b 169
e 91
c 49

g
h
k
l
m

52 ¶ Primam reſiduarum medietatum: in numeris conſtituere.

¶ Hec a geometrica ſumitur. Et ſint a b c in geometrica medietate ita tamen vt c minimus ſit maior ꝙ dr̃ia maiorum. ſubſtrahat igitur differẽtia maiorum ab c mĩmo/ ⁊ reſiduũ ſit d. dico b c d eẽ in hac prima collateralium medietatum ꝯſtitutos. nã quia a b c ſunt in geometrica medietate cõſtituti: ideo que ꝓportio a ad b: ea eſt ꝑ viceſimam huius differentie maiorum ad differentiam minorum. ſed differentia a ad b eſt eadem differentie c ad d. igitur differentia c ad d minorum ad differentiam b ad c maiorum ſicut a ad b. quare ſicut b ad c maximi ad medium. per diffinitionem itaꝙ patet ꝓpoſitum.

a 9
b 6
c 4

b 6
c 4
d 1

53 ¶ Secunde inuentionem declarare.

¶ Sint vt prius a b c in geometrica medietate quoꝝ differentiam minorum addo ad a. et ꝯpoſitũ ſit d. dico d ad b eſſe in ſecũda reliquaꝝ medietate. nam per viceſimam huius que ꝓportio a ad b ea erit differentie maiorum ad differentiam minorum nũerorũ in geometrica medietate ꝯſtitutoꝝ. et eadem eſt proportio differẽtie a ad b ad differẽtiam a ad d. igitur per diffinitionem cõcluditur propoſitum.

a 9
b 6
c 4

d 11
a 9
b 6

54 ¶ Tertiam carũdem in numeris aſſignare.

¶ Hec etiam habetur ꝑ geometricam medietatem. ſit ergo precedẽtium hypotheſis ⁊ maiorum differẽtia dematur ab b medio: ſitꝙ reſiduum d. dico b/c/d eſſe in tertia medietate. nam que differẽtia a ad b: ea eſt b ad d. igitur que ꝓportio differẽtie a ad b ad differentiam b ad c ea eſt differẽtie c ad d ad differentiam b ad c. quare que ꝓportio b maximi ad c medium: ea eſt differentie b ad d extremorum ad dr̃iam b ad c maiorum. cõſtat igit ꝑ diffinitionem b c d eẽ in ꝓpoſita medietate. qđ eſt ꝓpoſitum.

b 6
c 4
d 3

a 9
b 6
c 4

55 ¶ Quartam in terminis manifeſtare.

¶ Sint a b quilibet duo numeri: et cõpoſitus ex ipis ſit c. dico c/a/b eẽ tres terios in hac quarta medietate datos. qꝛ enĩ dr̃ia c ⁊ b extremoꝝ: eſt a. et dr̃ia c a maiorũ: eſt b. ꝙ que ꝓportio a ad b medij ad mĩmũ: ea erit dr̃ie extremoꝝ ad dr̃iam maiorum. per diffinitionem itaꝙ ꝯſtat factum eſſe ꝓpoſitum.

c 7
b 3
a 4

a 4
b 3

56 ¶ Quinte demonſtrationem explicare.

¶ Hec a geometrica medietate elicitur. Sint igitur vt prius a b c tres nũeri ĩ geometrica medietate quoꝝ c mĩmo addo differentiam maiorum: et cõpoſitus ſit d. dico d b c eſſe in ꝓpoſita medietate. nam differentia d c extremorum eſt differentia a ad b: igitur adiuuante viceſima huius que ꝓportio b ad c medij ad minimum: ea erit differentie d ad c extremorum ad differentiam b ad c minorum. Itaꝙ per diffinitionem demonſtratum eſt propoſitum.

d 7
b 6
c 4

a 9
b 6
c 4

57 ¶ Sextam ſub exemplo demonſtrare.

¶ Hec ex harmonica cognoſci poteſt. Sint a b c in harmonica medietate: ꝑ diffinitiõem que ꝓportio a ad c ea eſt dr̃ie maiorum ad dr̃iam minoꝝ. capio nũerum d inter a ⁊ c: cuius dr̃ia ſit ad a que b ad c. erũt itaꝙ trãſmutate differẽtie. quia que differentia a ad b maiorum: ea eſt d ad c mĩorum. ⁊ que b ad c minorum: ea erit a ad d maiorum. dico itaꝙ a d c eſſe qui petũtur. nam que ꝓportio a ad c extremoꝝ ea eſt differẽtie d c minorum ad differentiam a d maiorum. per diffinitiõem igitur patet effectum eſſe ꝓpoſitum. Quod 51 capite ſecũdi ſue arithmetices diuus Seuerinus teſtatur huic medietati quam ſuo ordine quartam ponit proprium eſſe vt qđ cõtinetur ſub maiore terio ⁊ medio duplum ſit ei quod

a 6
d 5
c 3

a 6
b 4
c

cõtinetur sub medio ⁊ paruissimo: hoc indubitatũ est per septimam secũdi quoties maximi ad mĩmũ est habitudo dupla / alioquin per eandem non teneat sed per eandem semper que ꝓportio maximi ad mĩmum ea erit eius quod cõtinetur sub maximo ⁊ medio ad id qđ continetur sub medio ⁊ mĩmo / ĩmo id omni medietati cõmune est.

a—9 d—7 b—6 a—9 b—6 c—4

¶ Septime terminos inuestigare. 58

¶ Hec ex geometrica. Sint a b c tres numeri in geometrica medietate ab a maximo eoꝝ substraho differentiam minorum ⁊ sit residuum d. et patebit vt prius que ꝓportio a ad b maximi ad mĩmũ: eam esse differentie extremoꝝ ad differentiam maiorum. quare per diffinitionem constabit propositum.

a—9 d—8 b—6 a—9 b—6 c—4

¶ Octauam demum restat explanare. 59

¶ Hec etiam ex geometrica. Sint sepius dati numeri a / b / c in geometrica medietate: et minorũ differentia addatur medio: fiatq; compositus d. dico a / d / b esse in hac vltĩa medietate. nam que ꝓportio a ad b maximi ad mĩmum: ea est adiuuãte vicesima huius differẽtia a ad b extremorũ ad differẽtiam d b minorũ. nam equatur differentie b ad c. igitur per diffinitionem a / d / b sunt in hac medietate. sicq; constant octo collaterales medietates monstrate.

a—8 b—4 c—2 d—6 e—2

¶ Trium numerorum maximi ad medium: atq; differentie maximi ad minimum ad differentiam medij ad ipm: eandem esse proportionem impossibile est. 60

¶ Sint a / b / c tres diuersi numeri quicũq;: quoꝝ a sit maximus / b medius / et c mĩmus: et differentia a ad c sit d. et differentia b ad c sit e. dico impossibile esse eandem ꝓportionẽ a ad b maximi ad mediũ que d ad e differentie maximi ⁊ minimi ad differentiam medij ad mĩmum. nam si ea ꝓportio sit a ad b que d ad e totius scz ad totum que detracti ad detractũ: erit c residui ad c residuũ: que a ad b totius ad totum. est enim c vtriusq; residuum. quare a et b idem sunt numerus atq; equales. quod est contra hypothesim.

a—20 b—8 c—5 d—40 h—25 g—20 e—16 f—10

¶ Si inter duos numeros sumãtur tres medij: vnus ſm arithmeticam medietatem: et vnus ſm geometricam: et tertius ſm harmonicam: arithmeticum maximũ: ⁊ harmonicum mĩmum: atq; inter illos geometricum medium esse ꝓportiõalit̃ est necesse. 61

¶ Sit a ad c ꝓportio quecũq; que potest in duo equa diuidi. vt exempli causa quadrupla inter cuius extrema per tricesimãnonam huius sit inuentus b in harmonica medietate duplo a b et c ⁊ ꝓueniant d / e / f qui ꝯsimiliter erũt in eadem medietate. et quia per septimam secũdi d ad f vt a ad c: et a ad c posita est partibilis in duas equas ꝓportiones: partietur etiam d ad f in equas. diuidatur igitur per g. erit igitur d ad g vt g ad f. quare g per diffinitionem medius est geometricus inter d ⁊ f. et quia f ⁊ d sunt pares: ipsorũ simul iunctorum capio medietatem que sit h: que per quintam huius est in arithmetica medietate inter d ⁊ f. habemus igit̃ inter duos numeros d et f tres medios h g e scz h in arithmetica medietate / g in geometrica / ⁊ e in harmonica demõstratos. qđ supponebat ꝓpositio. dico igitur d esse maximum mediorum: et e mĩmũ: et g medium ꝓportiõaliter atq; geometricum inter h ⁊ e. nam quia h est medius int̃ d ⁊ f ſm arithmeticam medietatẽ ⁊ e ſm harmonicam: ergo ꝑ quadragesimãprimaꝫ huius h maior est q̃ e. et que ꝓportio d ad h ea est e ad f. igitur per vicesimãquintam secũdi qđ fit ex d in f: equũ est ei qui fit ex h in e. sed quia g est medius ꝓportiõalis inter d ⁊ f: igitur per vicesimãsextam eiusdem quod fit ex d in f: equũ est ei qui fit ex g in se. quare quod fit ex g in se tm̃ est q̃tum quod ex h in e. igitur per secũdam partem eiusdem vicesimesexte secundi h g e sunt proportiõales. quare h erit maximus: g medius proportionalis: ⁊ e minimus. quod intendebat propositio.

¶ Duos numeros quoꝝ ꝓportio non sit data proportione maior / inuestigare: inter quos ſm tres dictas medietates medios assignare sit possibile. 62

¶ Datam proportionem quãcunq; diuidamus per sexagesimãnonam noni in quotlibet ꝓportiones: quaꝝ due sint equales: que ꝯposite nõ sint data proportiõe maior. ſm igit̃ illam ꝓportiõem ꝯpositam quero medium harmonicum ſm exigentiam tricesimenone huius et oĩno consimiliter operãdo vt in principio precedentis factum est inueniam tres medios modo qui in precedenti dictus est / inter duos numeros quoꝝ proportio non erit data proportione maior. sicq; constabit propositum.

¶ Decimi elementorum arithmetices Jordani finis.

Jacobi Fabri Stapulensis Elementa Musicalia ad clarissimū virū Nicolaum de haqueuille inquisitorium Presidētem.

DEcreuerā clarissime vir nulli meas elementoꝝ musicaliū qualescunqꝫ sunt prius dicare vigilias: ꝙ probatas cognouissē. Quis id me mime lateret/demōstrationes: in quibus vel solis vis sciētie cōsistit: nō probari non potuisse. Verū si presentiū iudicia parui ducis/reputasqꝫ: hi tibi ex āntiquis sūmopere musicos cōmendare labores iure valebunt.

Mercurius	Tamyras	Ptolomeus
Orpheus	Hysmenias Thebanus	Eubolides
Pythagoras Samius	Terpander lesbius	Hippasus
Amphion thebanus	Lycaon Samius	Aristoxenus
Linus	Prophrastus Periotes	Philolaus Pythagoricus.
Arion lesbius	Estiacus Colophonius.	Archytas tarentinus
Mydas Phrygius	Tymotheus milesius	albinus
Corebus lydius	Nicomachus	Diuus Seuerinus Boecius.
Hyagnis Phryx	Plato	
Marsias	aristoteles.	

Et similium ꝙplurimi quos oēs eterna memoria disciplinarū eblāditissima Musica reddidit isignes inter quos: duos pceptores meos Jacobū Labiniū et Jacobū turbelinū ānumero: tanqꝫ ea arte posteritati victuros. Comēdant et eā mirifici eius effectus. Pythagorici eni animoꝝ ferociā tibiis/fidibusqꝫ emolliebant. Esclepiades fremētis vulgi seditiones crebro cantu compescuit. Idēqꝫ tuba surdis medebatur. Damon pythagoricus ebrios et proinde petulātes adolescētes: grauioribus modulis ad tēperantiam reduxit. Febrē et vulnera: musica modulatione curauit antiqtas Eadē quoqꝫ suauitate schias/coxendicūqꝫ dolores emēdauit: qd hismenias thebanus tētasse memoratur. Theophrastus ad animi pturbationes moderādas musicos adhibuisse memorat modulos. Nec iniuria quidē. est eni musica vt quedā moderationis lex atqꝫ regula. Quamobrē bono iure eos ridebat diogenes musicos: qui cū citharā ad harmonicos cōsensus haberent temperatā: animū gererent incōpositū et prorsus harmonia vite destitutū. Xenocrates organicis modulis lymphaticos liberauit. Tales Cretensis suauitate citharae: morbos/pestilentiāqꝫ fugauit. Terpāder et arion Iones et lesbios cantu a grauissimis morbis leuasse: diuus Seuerinus autor est. Herophilus medicus egrorum venas musicis pensiculabat numeris. Tymotheus aūt musicus dum voluit efferatū reddidit alexandrū ad armaqꝫ furentē atqꝫ aliter cū libuit ab armis ad cōuiuia retraxit emollitū. Thracius Orpheus feraꝝ sensus fidibus/cātuqꝫ inflexit. hoc est ferinos hoīm mores leges ad citharā canendo ad moderatā humanitatē reduxit. Cerui fistulis capiūtur studioqꝫ modulationū detinentur. Cygni hyperborei citharae cātibus alliciūtur. Elephātes indi organica dulcedine permulcētur. Auicule fistulis irretiūtur. Teneros adhuc infantiū sensus permouent cātus/crepitaculaqꝫ vagientū sedāt. Delphinos suis sibi fidibus cōciliauit arion Serpētes cātibus rūpuntur. Sepultoꝝ manes cantibus excitātur. In actiaco littore mare citharā personare memorātur. Megaris citharā personat saxū: et ad cuiuslibet pulsantis ictum fidicinat. Et possem pleraqꝫ talia vir clarissime ad musicā cōmendationē adducere. at tot/tantisqꝫ et recentiū et priscoꝝ cōmendatā autoritatibus tibi nūc ab me atqꝫ bonarū litteraꝝ studiis dicatā disciplinā: equo suscipias animo tuis auspiciis lucem habiturā. Et me vnum inter tuos cliētulos tuarum virtutū/tuiqꝫ nominis obseruatorem esse cognoscito. Vale.

¶ Jacobus Stapulensis Jacobo Labinio et Jacobo Turbelino Musicis: suis charissimis preceptoribus.

Quod inter oratorē atqꝫ rhetora: id inter cantorem et musicum interesse volunt: neqꝫ oratorem quemꝙ dici mereri qui idem rhetor non sit. ita vestrū semper iudicium fuit: vt ne cantor quidē dici mereatur vnꝙ: qui idem musicus non fuerit: pulchre mimos/ et hystriones a cantorum honesto cetu sequestrātes tanꝙ Epicureos a sobria mensa/ castoqꝫ philosophorū dogmate. nec iniuria nam Homerus diuinus Poeta vbiqꝫ doctum et seria modulatū introducit cantorem vt apud Odysseam vbi Penelopē Phemiũ Fidicinē ad neruos verba mouētem his verbis allocutam effingit.

Preterea illachrimans diuum est affata canentem
Phemi multa tenes hominum mulcentia pectus
Facta hominum atqꝫ deum: et que laudē autoribus addunt.
Ex iis pange aliquid.

Et quales Homerus probat: vos minime tales esse dubito vt qui dudū a vobis prīa musices rudimenta perceperim. Quapropter ad vos nostros labores examinandos cōmitto. quos eo libentius me suscepisse fateor: quo musicalē scientiā neqꝫ apud grecos neqꝫ latinos quidē vnꝙ elementis traditam esse legerī: at introductiones ꝙplurimas inter quas ea omniū nobilissima est quam diuus Seuerinus Boecius sui monumentū reliquit. quem vnū in hac re preferrī delegi meorū studiorū ducē. Si ergo probaueritis satis michi est. In re enim nostra malumus aliorū iudicia sequi: ꝙ propria probare. Valete.

Antiqui qui de musica scripserunt		Insignes ex recentioribꝰ qui de eadē scripsere.
Democritus	Plato	Ibinus
Heraclides ponticus	Aristoteles	Diuus Seuerinus
Thimotheus milesius	Theophrastus	Basilius
Philolaus Pythagoricus	Nichomacus	Hylarius
Architas tarentinus	Aristoxenus	Augustinus
Duo Theodori	Ptolomeus	Ambrosius
Xanthus atheniensis		Gelasius.

Argumentum quattuor librorū musices.

¶ Primus liber interualla musicis modulationibus acōmoda discutit. multiplex: duplare/ triplare/ quadruplare. superparticulare: sesqualtex/ sesquitertiū/ sesquioctauū/ bis sesquioctauū/ ter sesquioctauū/ quater sesqoctauū/ quinqꝫ et sexies sesquioctauū

¶ Secundus de tono/ integro toni dimidio/ semitonio minore/ semitonio maiore/ cōmate/ schismate/ atqꝫ diaschismate.

¶ Tertius de sesquitono/ ditono diatessarū/ diapente/ diapente et tono/ diapason/ diapason et trisemitonio/ diapason et ditono/ diapason et diatessarō/ diapason et diapēte/ diapason diapente et tono/ disdiapason/ ac integro toni et cōsonantiarū oīm dimidio. Et de maximarum Harmoniarum consonantiis: et quarundā medietatum.

¶ Quartus de monochordo/ tetrachordo/ pentachordo/ heptachordo/ octochordo/ pentadecachordo/ diatonicis/ chromaticis/ enarmonicis melodiis. Et de melodiarū modis. et hec sub breuitate contracta: argumentū libri sunto.

¶ Jacobi Fabri Stapulensis Elementorũ musicaliũ ad clarissimum virum Nicolaum de haqueuille presidentem parisiensem liber primus.

Interuallum est soni grauis / acutiq; spaciorum habitudo.
Spacium vocamus neruũ / chordam / expiratum aerem / et quidquid simile est: a quo sonum elicimus.
Multiplex interuallũ est quoties maius spaciũ continet minus pluries. vt bis: et duplex interuallum dicitur. vt tertio: et dicitur triplex. vt quarto et quadruplex nuncupat. ꝛ hoc pacto deinceps
Interuallum superparticulare est cum maius continet minus: et partem eius aliquam.
Pars est que metitur totum: ipsum aliquoties sumpta restituens.
Si maius continet minus et eiusdẽ dimidium: sesqualterũ nominatur interuallum.
Si maius continet minus et minoris partem tertiam: dicitur sesquitertium.
Si vero cõtinet minus et eiusdẽ minoris partem octauã: epogdoum / sesquioctauũq; nominatur. Et ita reliqua superparticularia ĩterualla: perfacile est diffinire: sed parũ musico conducunt proposito.
Superpartiens autem diceretur interuallum: si maius contineret minus et minoris partes aliquot: que partẽ vnam non efficiunt.
Numeri sunt adinuicem primi: quos sola metitur vnitas.

Dignitates.

1 Quidquid metitur alterum: metitur et omne mensuratũ ab illo.
2 Compositum in ea resoluitur simplicia: ex quibus componitur.
3 Cuiuslibet numeri pars est vnitas: ab eo denominata.
4 Vnitas in quemcunq; numerum ducta: ipsum producit.
5 Quidquid metitur detractum et residuum: metitur ꝛ totum.
6 Quecunq; vni et eidem equa sunt: ꝛ ea inter se sunt equa.
7 Et que inter se sunt equa: eiusdem sunt eque multiplicia aut submultiplicia.
8 Eorum quorum tota sunt equa: et dimidia sunt equa.
9 Quidquid bis auctum aliquid transcendit: id vltra illius dimidiũ esse necesse est.
10 Et quod duplicatum non implet integrum: id profecto non continet dimidium.
11 Omne totum est maius sua parte.

¶ Petitiones.

1 Data equali chorda: que spacij ad spaciũ proportio est: eam esse ꝛ soni ad sonum.
2 Inter numeros sola vnitate distantes: nullum intercipi posse medium.
3 Spacium quodlibet in quotlibet equas partes diuidere.
4 Totum ad suam partem / et laxius ad se tensum: grauiorem sonum edere.
5 Omnem proportionem esse tanq; numeri ad numerum.
6 Si numerus numerũ datum multiplicet: ideq; productũ diuidat: numeꝝ datũ redire
7 Si numerũ datũ numer⁹ diuidat: ꝛ qd̃ ꝓuenit rursus multiplicet: numeꝝ datũ rẽdire.
8 Extremorũ proportionẽ ex mediorũ proportionib⁹ vt suis partibus esse compositã.
Extremi ordinatarũ proportionũ: maximus / minimusq; terminus intelliguntur.

¶ Sciẽtia subalternata qualis ad Arithmeticã Musica est: principiis et demõstratis scientie prioris subalternãtisq; vtitur. at studuimus vt q̃ fieri potest rarissime id in hac disciplina fiat. verum plerũq; vbi oportunũ videbitur alio q̃ in arithmeticis factũ est vtemur demõstrandi mõ: quo singula magis ex propriis facta videãtur q̃uis arithmetico suffragio atq; iis que in arithmeticis monstrata sunt eadem prõptius faciliusq; fierent: attamen quando id fiet ꝛ quando nõ sequentibus demõstrationibus cuilibet per q̃ perspicuum euadere poterit.

¶ Si interuallum multiplex binario multiplicetur: id quod fit ex hac multiplicatione interuallum multiplex est. 1

d	e	c	
16	8	4	Multiplex ex duplatione.
4	2		Multiplex interuallum.
A	B		

¶ Interuallum binario multiplicare: est interualli habitudinem duplare que quo pacto duplāda sit duobus tertia propositione quinti Arithmetices notum esse potest. vt si a b sit interuallum quodcūq₃ quod binario multiplicare iubeamur: ipsum per tertiam quinti multiplicabimus si ducimus a in se et b in se proueniantq₃ d c eritq₃ productorum d et c duplex interuallum interuallo producentiū a b. Qui si rursum ducimus a in b proueniatq₃ productum e erit per sextam quarti que proportio d ad e ea dem e ad c et interuallum d c in duo equa partitum. Sed esto nunc vt interuallum a b sit multiplex queādmodum proponit propositio quod modo pauloante dicto: binario multiplicetur: sitq₃ duplum d c et ea proportio d ad e ⁊ e ad c: dico interuallū d ad c esse multiplex. Nam cum a ad c multiplex sit interuallum cum geminatur manifestum est multiplex addi multiplici quare per vicesimāsecundam noni Arithmetices statim notum est interuallum compositum multiplex esse. ⁊ propositū. Sed idem aliter hic demonstratur. Quoniā enim que proportio a ad b ea est d ad e et e ad c. nam vtraq₃ proportionis duplate a ad b medietas. Proportio aūt a ad b posita est multiplex: igitur et proportio d ad e multiplex est. metiẽ igitur per diffinitionē multiplicis: e ipsum d vel bis vel ter vel deinceps. Et eodē quoq₃ iure c toties metitur ipsum e. quare ⁊ c per primū communē conceptū etiam metitur ipsum a. Quicquid enim alterū metitur: metitur et omne quod mensuratū est ab illo. est itaq₃ per diffinitionē interuallum a c multiplex. quod erat ostendendum.

¶ Si fuerint termini ꝓportionaliter constituti: cum primus fuerit vltimo cōparatus si primus vltimum fuerit mensus: metietur et secundum. 2

2	4	8	1	2	4	A b c tres termini proportio-
a	b	c	d	e	f	nales quorū a numerat b.

¶ Tametsi hanc decimatertia quarti demōstret sufficienter: eam tamen āplius hoc in loco volumus manifestare. Sint enim a b c termini proportionabiliter constituti et a numeret c: dico idem a numerare b. capio enim d e f terminos in ea proportione minimos. Quoniā enim d ad e vt a ad b: et e ad f vt b ad c. igitur per equam proportionalitatē quam vicesimaprima secundi Arithmetices monstrat d ad f vt a ad c. sed a per hypothesim metitur c: igitur et d metietur f. At quia d e f positi sunt in sua proportione minimi. ergo per quintam quarti d et f sunt adinuicem primi. Et cum d seipsum metiaẽ pariter et f per diffinitionē d est vnitas. At vero cum vnitas sit omnis numeri pars: d ergo metietur e Et cum a ad b vt d ad e: metietur igitur a ipsum b secundū terminum: quod erat cognoscendum atq₃ propositum.

¶ Si interuallum binario multiplicatū: multiplex effecerit interuallum: ipsum quoq₃ multiplex erit. 3

2	4	8	A b interuallum binario multiplicatū
a	b	c	multiplex efficiens.

¶ Hec est conuersa prime: cuius hec est ratio. Nam cum interuallum compositū multiplex sit et per secundam cōmunem scientiam resoluatur in id interuallum ex cuius multiplicatione creuit siquidē compositū omne: in ea simplicia dissoluitur ex quibus coalitū|concretum|compositūq₃ esse cognosciẽ per sexagesimā noni interuallum simplex multiplex erit. At id idem aliter ostenditur. Nam si a b c geminatum interuallū sit multiplex sic vt c multiplex sit ad a et ea proportio a ad b ⁊ b ad c: quoniā c ad a erit multiplex: a per diffinitionē metietur ipsum c. quare ⁊ per precedentem a metietur ipsum b. est igitur interuallum simplex b ad a per diffinitionem multiplex. et propositum.

4 ¶ Si terminorū interualli primus ad ſecundū comparatus ſeſe vt tertius ad quartū habuerit: quot proportionaliter medij primo et ſecundo: totidem tertio ⁊ quarto interuenire neceſſe eſt.

E medium proportionale inter d et f tertium ⁊ quartum vt b inter primū et ſecundum.

27	18	12		18	12	8		9	6	4		2
A	b	c		d	e	f		g	h	k		l

¶ Hanc duodecima quarti monſtrat cuius adhuc hic vt ad ſequentia momentum habens: cognitio promptior habeatur: repetitur demonſtratio.
¶ Sit a cuiuſcunq; interualli primus terminus ad c ſecundū vt d tertius ad f quartū: et ſit b medius proportionaliter conſtitutꝰ inter a ⁊ c. dico etiam inter d et f interuenire vnum proportionalit̄ mediū. Capio eni per ſextam quarti g h k tres minimos ſecundū proportionē a ad b et argumentor ex viceſimaprima ſecundi per equam proportionalitatē g ad h vt a ad b et h ad k vt b ad c. igitur g ad k vt a ad c. quare ⁊ vt d ad f. at ſi d et f ſunt iidem termini cū g k manifeſtum iam eſt inter d et f interuenire vnū proportionaliter mediū. Sin minus: ergo per viceſimā tertij Arithmetices g et k metiētur d et f equaliter: ſitq; id ſecundū l. duco ergo l in g h et k ⁊ proueniant d e f per ſeptimam ſecundi d ad e vt g ad h et e ad f vt h ad k. quare e interuenit ꝓportionaliter medius terminis d ⁊ f: qđ erat mōſtrandū.

5 ¶ Superparticularis interualli medius numerus: neq; vnus neq; plures proportionaliter interuenient.

Q proportio ſuperparticularis: in duo equa diuidi non poſſit.

27		18						A c ſpacium ſuperparticulare.
A	b	c		d	e	g	f	D e f tres minimi proportionis a ad b.

¶ Hanc intelligimus: nullum ſuperparticulare interuallum in duas aut plures interuallorū habitudines proportioneſq; ſecabile eſſe. quod demonſtratione proxime ſubiuncta perq̄ facile liquebit.
¶ Sit a c interuallū ſuperparticulare quod diuidatur in duo equalium habitudinū ſpacia a b ⁊ b c certis cōſtitutiſq; numeris ſi poſſibile eſt. ſitq; iccirco vt a ad b ita b ad c. capio per ſextā quarti arithmetices d e f tres minimos continue ꝓportionales in proportione a ad b. et q̄r d ad e vt a ad b et e ad f vt b ad c: ergo per equā proportionalitatē d ad f vt a ad c. atqui a ad c poſitū eſt ſupparticulare interuallū: igitur ⁊ d ad f eſt ſuperparticulare. Atvero quoniam d e f ſunt tres illius habitudinis minimi termini: igit̄ d et f primus ⁊ vltimus per primā quarti ſunt adinuicē primi. At cū d mōſtratus ſit ſuperparticularis ad f: per diffinitionē d continet f et eius partem que ideo per diffinitionē metitur f. Et ſi ea pars ſit numerus cum ea etiam per cōmunem conceptū metiatur d: metietur enim ſe partem detractam ⁊ reſiduū quod equū eſt f. non erūt ergo d et f adinuicem primi cuius oppoſitū iam monſtratum eſt ⁊ impoſſibile. erit ergo ea pars vnitas. Tunc addo vnitatem ipſi f ⁊ fiat g: vt g et f ſolius vnitatis diſcrimine diſtent mox argumentor d ad f vt g ad f. ſed inter d et f poſitus eſt vnus interuenire medius igitur per precedentē ⁊ inter g et f numeros ſola vnitate diſtantes interuenit intercipiturq; aliquis numerus medius quod per ſecundā petitionem eſt impoſſibile. non igitur ſuperparticularis interualli vnus medius interuenit numerus. neq; quoq; eodem argumēto interueniēt plures. Et hāc etiam demōſtrat ſexageſimaprima noni. Et ex hac quoq; cognoſcitur reprehēſionem demōſtrationis Archite: q̄ nulla ſuperparticularis in duo equa diuidi poſſit quam tertio inſtitutionis muſice capite vndecimo videtur diuus Seuerinus adducere nō tam eſſe diui Seuerini q̄ Nichomachi aut aliorū quos interpretatur elegantiſſime qui ⁊ ſimile in pleriſq; tum Arithmetice tum Muſice inſtitutionis locis feciſſe comperitur. Et non verentur quidā (pace omniū dixerim) eius libros perluſtrare non vt ſciant ſed vt exſurculent et canino more ſi quid hians/ſubſultanſq; appareat: altius dentem infigant/mordeant ⁊ reprehendant et ſanctū ⁊ venerabile Philoſophie nomen et ſuorū conuiciis lacerent; et quod aliorū vicium eſt ſi quod eſt: diui Seuerini exclament errorem faciantq; aliorū crimine reum. et cum nichil norint volunt litterarios duces inſectādo/carpendo/laniādo omnia ſcire videri: atq; ſupra Philoſophicos vertices ſeſe gloriabundos extollere/faciuntq; quod eſt apud Comicū ne intelligēdo vt nichil intelligant quos idem ſtatim vt maledicere deſināt ammonet malefacta ne cognoſcant ſua. Sed hec preter preſentis negocij officium. de Philoſophis eni qui recte fuerint natura inſtituti vel abſq; monitione ſemper recte cogitabunt qui eni ſecus faciunt ab eorum ſe ſegregant conſortio et vt Philoſophi quales ſe videri volunt non amplius eſſe cognoſcantur neceſſe eſt.

¶Si interuallum non multiplex binario multiplicetur:id quod fit ex hac multiplica 6
tione neq multiplex est/neq superparticulare.

9	6	4	A c interuallum neq multiplex neq superparticulare.
A	b	c	A c duplatum interuallum a b qd quidem est non multiplex.

¶Sit interuallū non multiplex a b:et duplum sit a c.ita vt ea sit proportio a ad b ⁊ b ad c.dico interuallum a c neq multiplex esse neq superparticulare.quoniã si a c primo ponatur multiplex: ergo per tertiã presentis et a b interuallū erit multiplex at positum est nõ multiplex. Et si secundo dixeris a c esse interuallū superparticulare cū sit a ad b vt b ad c erit interualli superparticularis medius proportionalis terminus quod per precedentẽ est impossibile. est itaq notum si interuallū nõ multiplex binario multiplicetur compositum interuallum minime aut multiplex aut superparticulare esse. et propositum.

¶Si iteruallum binario multiplicetur: atq id quod ex ea multiplicatione creabitur 7
multiplex non sit: ipsum quoq non erit multiplex.

¶Hec est conuersa precedentis. Sit ergo superioris propositionis figura in qua interuallū a c prouenIat ex duplatione habitudinis interualli a b et nõ sit a c interuallum multiplex. dico itidem interuallum a b nõ esse multiplex. Nam si a b interuallū multiplex est:cū a c per hypothesim ex interuallo a b binario multiplicato surgat: ergo per primã presentis interuallū a c multiplex erit. at positū est nõ multiplex: ergo si interuallū non multiplex ex alicuius interualli binario multiplicatione nascat neq ipsum quoq ex cuius multiplicatione ortū est multiplex erit:qd erat monstrandū.

¶A numero partiū superparticularis interualli que in vnum adacte totum restituũt
et numero vno maiore:quot interualli maiores termini simul: minoribus simul acce= 8
ptis respondeant: cognoscuntur.

A	3	4	5	6	7	8	9
B	2	3	4	5	6	7	8
C	2	3	4	5	6	7	8
D	3	4	5	6	7	8	9

¶Sit a ad b interuallū superparticulare manifestū est per diffinitionẽ superparticularis a cõtinere b et vnam partiū b. ea igitur pars secundū numerum c:constituat suum totū b: et sit d numerus vno maior c:dico a sumpta secundū numerum c equa esse b sumptis secūdum d. Nam a secundū c sumpta continent b secūdum c sumpta et insuper partes b sumptas secundū c. Atqui positū est eas secundū c constituere vnū b. igitur a secundū c sumpta continent b sumpta secundū numerꝫ vno maiorem c. At vero d positus est numerus vno maiore c. ergo a sumpta secundum c:continent b sumpta secundū d. quod erat monstrandū. ¶Et si exemplarẽ requiris declarationẽ:si a ad b interuallū est sesqualterū: quoniã a sesqualterū est ad b.ergo a continet b ⁊ eius dimidiū:et duo dimidia per cõmune proloquiū suum totū reddunt.dico ergo duo a tantū esse ꝙtum tria b:quoniã enim duo a continent duo b. et insuper duo dimidia b que vnū b restituunt:ergo duo a continent tria b/tribusq euadunt equalia. Et si a ad b est sesquitertiū a continet totum b ⁊ tertiam partẽ b.at tres tertie b eque sunt vni b.ergo superiore argumento tria a cõtinent quattuor b/quattuorq euadunt equalia.imo data quacūq superparticulari maiores termini secundū proportionis minorẽ numerū:equantur minoribus terminis scdm proportionis maiorẽ numerū sumptis.vt si a ad b sit sesquiquinta: quoniã minimi sesquiquinte sunt 6 et 5.idcirco quinq a equi sunt sex b.et in nõ minimis quoniã 12 et 10 sunt termini sesquiquinte 10 a equantur 12 b. Et si a ad b sit sesquioctaua:quoniã minimi sesquioctaue sunt 9 et 8. idcirco 8 a tantū sunt ꝙtum nouem b.Et qꝛ rursum 18 ad 16 sesqoctaua:ideo sexdecim a equi sunt 18 b.et ita in ceteris Sed si id nõ modo particulariter sed ⁊ vniuersaliter contẽplari cupis id vniuersaliter verū erit.

¶Data quacunq proportione:maiores termini secūdum numerū minorum sumpti:
equi sunt minoribus secundum numerum maiorum sumptis. 9

I

A Supparti	3	4	5	6	7	8	9	Multi-	2	3	4	5	6	Supp	5	7	9	11
B culares	2	3	4	5	6	7	8	plices.	1	1	1	1	1	tiẽtes.	3	4	5	6

¶ Ut sit a ad b quecunqꝫ proportio et a maior terminus: b vero minor. dico a sumptos secundũ b numerum minorẽ equos esse b sumptis secundũ a numerꝝ maiorem. Nam per octauam primi Arithmetices quod fit ex a in b: equum est ei quod fit ex b in a. Atvero quod fit ex a in b: sunt a sumpti secundũ b. et quod fit ex b in a sunt b sumpti secundũ a. igitur a sumpti secundũ b equãtur b sumptis secũdum a et in quibuslibet aliis eadẽ est demõstratio ⁊ propositũ.

10 ¶ Cum aliquot maiores termini aliquot minoribus equi sunt: ea vnius maiorum ad vnum minorum reperitur ꝓportio: que ⁊ numeri minorum collectorum ad maiorum collectorum numerum.

¶ Hec est cõuersa p̃cedentis. Quoniã per precedẽtem minores collecti secundum numerũ maiorum equi sunt maioribus secundũ numerum minorũ collectis. Sed numerus maiorũ est vnus terminus maior et numerus minorũ vnus terminus minor. ergo eadem est proportio vnius maiorũ ad vnum minorũ: que numeri minorũ collectorꝝ ad numerũ maiorum collectorũ. ¶ Et quãq̃ he due vltime conclusiones faciles sunt: vsus tamẽ earum paulo latẽtior est. Per primã enim earũ que nona est: habemus si numerus maior ad minorẽ sesqualter est vt trium ad duo: duo maiores equi sunt tribus minoribus. Et si maior ad minorẽ sesquitertius vt 4 ad 3: tres maiores equi sunt quattuor mĩoribus. Et si maior sesquiquartus vt 5 ad 4: quattuor maiores equi sunt quinqꝫ minoribus. Si vero maior sesquioctauus: octo maiores equi sunt nouẽ minoribus. ⁊ ita in cõsimilibus. In multiplicibus aũt si maior duplus est vt duorũ ad vnum: vnus maior equus est duobus minoribꝰ. Si triplus: vnus maior equus est tribus. Si quadruplus: vnus equus est quattuor. Si octuplus: vnus equat ad octo. In superpartientibus vero consimile est: vt si maior est superbitertius vt 5 ad 3: tres maiores equi sunt quinqꝫ minoribus. Si supertriquartus vt 7 ad 4: quattuor maiores equi sunt septẽ minoribus. Si vero superoctupartiẽs vt 17 ad 9: nouem maiores equi sunt decem ⁊ septẽ minoribus. et hoc pacto in reliquis.

¶ Ex vltima autem hanc in superparticularibus vtendi regulã elicimus. Si duo maiores equi sunt tribus minoribus quattuor ad sex| sex ad nouẽ| octo ad duodecĩ: vnus maior ad vnum minorẽ sesqualter est. Et si tres equi sunt ad quattuor: sex ad octo maior ad minorẽ est sesquitertiꝰ. Si quattuor maiores equi sunt quinqꝫ minoribus: aut octo ad decẽ: vnus maior vnius minoris est sesquiquartus. Si vero octo maiores nouẽ minoribus sunt equi: vnus maiorũ ad vnum minorũ cognoscit sesquioctauꝰ. In multiplicibus. si vnus duobus: duo ad quattuor| tres ad sex equi sunt: maior minoris est duplus. Si vnus tribus| duo ad sex: vnus maior minoris est triplus. Si vnus ad quattuor: et duo ad octo: vnꝰ maiorũ ad vnum minorũ est quadruplus. Si vero vnus ad octo| duo ad sedecim: maior mĩoris est octuplus. In superpartiẽtibus. si tres maiores equi sunt quinqꝫ minoribus: aut sex ad decẽ: vnus maior ad minorẽ est superbitertius. Si quattuor maiores septẽ minoribus: maior minoris est suptriquartꝰ. Si vero nouẽ equi sunt ad decem ⁊ septem: maior minoris est superoctupartiẽs. Et in compositis numeris simile est. vt si duo a equi sunt quattuor b ⁊ dimidiũ vnius: quẽadmodum in duobus coniũctis sesqualteris. quoniã 4 et vnius dimidiũ ad 2 duplũ sunt et sesquiquartũ: iccirco vnus a ad vnum b duplus est atqꝫ sesquiquartus. Si tres a equi sunt ad quattuor b et tertiã vnius: vt in duobus sesq̃tertiis quoniã quinqꝫ ⁊ tertia vnius cõtinent tres semel| duas tertias et vnam nonam: proinde vnus a continebit b vnum| duas eius tertias et vnam eius nonã. Si quattuor equi sunt ad sex et quartã vnius: vt in duobus iunctis sesquiquartis: quoniã sex ⁊ quarta vnius cõtinent| quattuor/ dimidiũ/ et decimam sextam ex quattuor: ideo vnus maior cõtinet minorẽ semel| eius dimidiũ| ⁊ eius vnam decimã sextam. Si vero octo valent decẽ ⁊ octauam vnius vt in duobus sesquioctauis: quoniã decem continent octo: et quartam: ⁊ octaua vnius ad octonos vna est sexagesimaquarta: ideo vnus maiorũ continet minorẽ semel| eius quartã partem/ et eius sexagesimãquartam. Et si cõpositionis series protensior euadit: vt si duo a equi sunt sex b| medietati vnius et quarte vt in coniũctione trium sesqualterorũ: quoniã sex cõtinent duos ter ⁊ dimidiũ vnius est quarta pars duorũ: et quarta pars vnius est octaua pars duorꝝ. Iccirco vnus a triplex est b vnius insuper quartã atqꝫ octauam partẽ b continens. Et si tres equi sunt ad septem ⁊ nonã vnius quod in tribus sesquitertiis coniunctis euenit: quoniã septem: bis continent tres: ⁊ trium tertiã partem: et nona vnius ad tres est vicesimaseptima. ideo vnus maiorũ continet minorem bis| eius tertiam| et eius vicesimãseptimam. Et si quattuor equi sunt septẽ dodranti vnius hoc est tribus quartis et insuper decimesexte vnius: vt in coniũctione trium sesquiquartorꝝ: quoniã septẽ cõtinent semel quattuor et tres quaternarũ partes: et tres quarte vnius ad quattuor sunt tres decime sexte: ⁊ decimasexta vnius est ad quattuor vna sexagesimaquarta. iccirco vnus maior continet vnum minorẽ semel| et dodrantẽ| ⁊ tres decimassextas atqꝫ vnam sexagesimãquartã. Si vero octo equi sunt ad vndecim| tres octauas vnius ⁊ vnam sexagesimãquartam: vt in tribus sesquioctauis ꝯiunctis: q̃m vndecim cõtinent semel octonariũ et octonarij tres partes: ⁊ tres octaue vnius sunt ad octo tres sexagesimequarte. ⁊ vna sexagesimaquarta ad octo est vna quingẽtesima duodecima. hinc fit vt vnus maiorum cõtineat minorem semel| tres eius octauas| tres sexagesimas quartas et vnam quingentesimã duodecimã. Et hec adiecimus quovsus harũ duarum vltimarꝝ in sequẽtibus patentior| manifestiorqꝫ habeatur.

¶ Duplex interuallū ex duobus maximis supparticularibus: sesqualtero atq; sesqui= 11
tertio coniungitur.

6	4	3	A c duplex interuallum.
a	b	c	A b sesqualter. b c sesquitertius.

¶ Sint a b c interuallū: a quidem sesqualter ad b: b vero sesquitertius ad c: dico a duplum esse ad c. Quoniā enim a sesqualter est ad b: ergo per octauā huius duo a equi sunt ad tres b. et rursus quia b sesquitertius ad c: igitur per eandem tres b equi sunt quattuor c: et tres b positi sunt equi duobus a. duo igitur a equi sunt ad quattuor c. cum quecūq; vni eidemq; equalia sunt inter se sint ꝛ equalia. et quattuor numerus minorū collectorū duplex est duorum numeri scʒ collectorū maiorꝫ. igitur per precedentē vnus a duplex erit ad vnū c. qđ erat demōstrandū potest ꝛ hoc vltimū etiam demōstrari. Q̄m eni duo a equi sunt quattuor c: vnus a per octauū proloquiū equus est duobus c. quorꝫ eni tota equa sunt et eorū quoq; dimidia sunt equa. At duo c dupli sunt vnius. igitur et vnus a duobus c equus: duplex erit c vnus quod fuisset monstrandum.

¶ Ex duplici interuallo atq; sesqualtero: triplex nascitur interuallum. 12

6	3	2	A c triplex interuallum.
a	b	c	A b duplex interuallū. b ꝛ c sesqualterū.

¶ Sint a b c interuallū: et a quidē ad b duplex ꝛ b ad c sesqualter. dico a eius quod est c triplicē esse quoniā enim a ad b duplex est: ergo a per diffinitionē continet bis b. igitur a equatur duobus b. et qꝛ b sesqualter est ad c: igitur b continet c et eius partem dimidiā. ergo per octauam huius duo b equi sunt tribus c: et duo b equi erant vni a. igitur ꝛ tres c equi erunt vni a. tres autem triplex sunt vnius. igitur per decimā vnus a triplex est vnius c: quod erat demonstrādum.

¶ Duo duplicia interualla: quadruplex coniungunt interuallum. 13

4	2	1	A c duplex interuallum
a	b	c	A c geminatū duplex interuallū

¶ Sit a duplex ad b: et b duplex ad c. dico quoniā a quadruplex est ad c. Nam quia a duplex est ad b: igitur duo b equi sunt vni a. et rursus qꝛ b duplex est ad c: igitur duo c equi sunt vni b. et si duo c equi sunt vni b: quattuor c equi erunt duobus b. at duo b positi sunt equi vni a: igitur et quattuor c equabuntur vni a. at quattuor quadruplū sunt vnius. igitur per decimam vnus a quadruplex est vnius c: quod erat ostendendum.

¶ Terminū reperire: ad quē quotcunq; volumus: liceat supparticulares assignare. 14

9	8	6	A ad c sesqualter.
a	b	c	B ad c sesquitertius

¶ Sit propositū terminum reperire ad quem sesqualterū ꝛ sesquitertiū valeamus assignare. Capio duo ꝛ tria numeros denominātes partes sesqualteri atq; sesquitertij: duo siquidē sesqualterū et tria sesquitertiū denomināt. ꝛ duco duo in tria: proueniatq; ductu illo c. manifestum est c habere partem dimidiā pariter ꝛ tertiam. iungo ad c partē eius dimidiā: ꝛ compositus sit a. et iterū ad c iungo partē eius tertiā: et sit cōpositus b. quoniā enim a continet c et eius partem dimidiā: ergo per diffinitionē a ad c sesqualter est. et quoniā b continet c et eius partem tertiā: b itidem ad c sesquitertius. c igitur repertus est terminus ad quē petiti superparticulares rite sunt assignati. et hac lege de quibuslibet esset operandū: vt si essent assignādi sesquioctauus et sesquinonus duc octo in nouē ꝛ surget terminꝰ octauam / nonāq; partem possidens: ad quē ꝛ sesquioctauū et sesquinonū rite assignaueris. et eodem quoq; pacto modo tres: modo quattuor aut quotquot libuerit ad eundem terminum assignabis:

640	600	576	540	480
a	b	c	d	

vt si ad eundē terminū peterentur assignari sesquitertius / sesquiquartus / sesquiquintus / ꝛ sesquioctauus ducātur tria / quattuor / quinq; et octo in seinuicē ꝛ proueniat e qui circo habet in se tertiā / quartam quintā et octauam. adiungo e suam tertiā compositusq; sit a. et suam quartā ꝛ compositus sit b. suam quintā compositus sit c. suā deniq; octauā ꝛ ꝯpositus sit d. dico demōstratione superiore: quoniā ad e constituti sunt a b c d sesquitertius / sesquiquartus / sesquiquintus / et sesquioctauus: queadmodum prefixa monstrat formula.

15 ¶Si sesqualtero interuallo sesquitertium demptum fuerit interuallum: erit qd̄ relinquitur sesquioctauum.

9	8	6	A c sesqualter. B c sesquitertius.
a	b	c	A ad b sesquioctauus.

¶Sit c terminus ad quem p̄ precedentē assignati sint a sesqualter: ⁊ b sesquitertius. Ab a c sesqualtero subduco interuallum sesquitertium b c: relicto interuallo a ad b: quod dico esse sesquioctauū. q̄m enim a eius quod est c est sesqualter: a semel habet c et eius dimidiam partem. quare per octauā huius duo a equi sunt tribus c. ⁊ quattuor a sex c. et octo a ad duodecim c. Rursus q̄m b huius quod est c sesquitertius est. b igit̄ habet in se c ⁊ eius tertiā partem. quo fit vt p̄ eandē octauā tres b equi sint q̄ttuor c. et sex b octo c et nouē b ad duodecim c. at octo a quidē equi erāt ad duodecim c: igit̄ octo a equi sunt ad nouem b. per decimam igit̄ a ꝯtinet b ⁊ eius octauā partem. estq; a sesquioctauus ad b et ꝓpositū.

16 ¶Interualli quarta ⁊ duodecima: vnam eius tertiarum restituunt.

¶Nam quattuor interualli quarte: totū complēt interuallū. ⁊ duodecim eiusdē interualli duodecime: totū itidem cōplent interuallū. quare quattuor quarte ⁊ duodecim duodecime adinuicē equātur. due igitur quarte sex duodecimis/ ⁊ vna quarta tribus duodecimis sunt eque. quoꝝ enī tota equa sunt: ⁊ eoꝝ dimidia. At quattuor duodecime: duodecim duodecimarū sunt vna tertia: q̄re ⁊ vna totius tertia cui quidē duodecim ille duodecime cognoscūtur esse idem atq; eque. vna igit̄ totius quarta q̄ tribus duodecimis equa esse mōstrata est et vna duodecima illi adiuncta: totius tertiam partem restituunt. Equātur enī vna tertia ⁊ vna duodecima quattuor duodecimis. qd̄ erat demōstrandum. Et q̄uis hec demonstratio sequētis gratia particulariter facta sit: possis tn̄ modo ꝯsimili monstrare oēm minorem cuiuscūq; totius interualli partem: ꝓxime maiorem partem efficere: illi adiecta vna partium a nūero qui ex ductu denoīationū vtriusq; partium enascitur: denoīata. vt totius tertia pars minor est: ⁊ scd̄a ꝓxime maior: et si duo in tria duxeris sunt sex: iccirco vna tertia atq; vna sexta vnam restituūt scd̄am. Similiter quoq; quarta ⁊ quinta partes sunt ꝓxime maior atq; minor: et si ducis quinq; in quattuor surgunt viginti: proinde vna quinta ⁊ vna vicesima: vnā quartam restituūt. et hoc pacto in sequētibus vt subiecta monstrat formula.

Tertia et sexta	vnam secundam efficiunt.
Quinta et vicesima	vnam quartam.
Sexta et tricesima	vnam quintam.
Septima ⁊ quadragesimasecūda	vnam sextam.
Octaua ⁊ quinquagesimasexta	vnam septimam.
Nona ⁊ septuagesimasecūda	vnam octauam.

17 ¶Due proportiones sesquioctaue: minores sunt sesquitertio interuallo.

81	72	64		A c duo sesquioctaui coniūcti.
a	b	c	d	A d sesquitertiū interuallū.

¶Cōtinua per sextam quarti Arithmetices duas sesquioctauas inter a ⁊ c: ita vt a sesquioctau⁹ sit ad b/ et b sesquioctauus ad c. et sit a ad d sesquitertium interuallū. dico a ad c minus eē interuallum: q̄ a ad d. Q̄m enī a sesquioctau⁹ est ad b: ergo p̄ octauam huius octo a equi sunt ad nouem b. sed ⁊ q̄r b etiam sesquioctauus est ad c: per eādem octo b tm̄ sunt atq; nouem c. Et cum vnus b equus sit vni c ⁊ octaue eius: ergo nouem b equi sunt decem c ⁊ octaue vnius c. Atqui nouem b mōstrati sunt equi esse octo a: igitur octo a equi sunt decem c ⁊ octaue vnius. at decem ⁊ octaua vnius ꝯtinet octo semel/ eius quartam ⁊ eius vnā sexagesimāquartā. ergo per decimā huius vnus a ꝯtinet vnū c/ vnā eius quartā/ ⁊ vnam sexagesimāquartam: et vna quarta ⁊ vna sexagesimaquarta per precedētem minus sunt vna tertia: cōplent enī quarta ⁊ duodecima vnā tertiam. duo igit̄ sesquioctaui minus sunt vno sesquitertio interuallo. quod erat demonstrandum.

18 ¶Tres sesquioctaui: amplius sunt sesquitertio: minus aūt sesqualtero interuallo.

729			512	A d tres sesquioctaui cōiūcti
a	b	c	d	

¶Sint a b c d tres coniūcti sesquioctaui: vt a ad b primus sit sesquioctauus/ b ad c secūdus/ et c ad d tertius: dico primo a ad c amplius esse sesquitertio. Q̄m enī a ad b ⁊ b ad c duo sūt sesquioctaui: ergo per octauam huius octo a equi sunt decem c ⁊ octaue vnius. Sed ⁊ cum c iteꝝ ad d positus sit sesquioctauus: ergo p̄ eādem octo c equi sunt nouem d/ et nouē c equi decem d ⁊ octaue vni⁹ et decem c equi vndecim d ⁊ duabus octauis. et cū octo octaue c ꝯtineant nouem d: g̊ per decimam huius vna octaua c continet octauam d ⁊ eius octauam partem: hoc est vnam sexagesimāquartam. decem ergo c et vna octaua vnius equātur vndecim d/ tribus octauis/ et vni sexagesimequarte. et per decimā vt vndecim tres octaue ⁊ vna sexagesimaquarta ad octo: ita a ad d. sed vndecim cōtinent octonos semel tres eoꝝ

partes/ tres octauas/ et vnā sexagesimāquartam vnius. ac tres octonoꝝ partes amplius sunt tertia eoꝝ parte. Superāt enī tres octonarij partes: tertiam eiusdē partem triente vnius: hoc ē tertia vnius parte. a fortiori igitur tres octonoꝝ partes/ et tres octaue vnius ⁊ vna sexagesimaquarta itā āplius sunt tertia octonorum parte. cōtinent ergo vndecim/ tres octaue vnius/ ⁊ vna sexagesimaquarta: octo semel ⁊ amplius eoꝝ parte tertia. quare ⁊ a cōtinet d ⁊ āplius tertia eius parte. est itaqꝫ a ad d āplius sesquitertio interuallo. Scdo dico a ad d minorem eē sesqualtero intuallo. Nam vndecim ꝯtinēt octo ⁊ tres octauas: deest ergo vna octaua ad complēdas quattuor octauas/ q̄ sunt octonorum dimidium. Atvero q̄ superāt: tres octaue vnius/ et vna sexagesimaquarta minus efficiūt dimidio vnius octaue. quare ⁊ multo minus efficient vna octaua. vndecim ergo/ ⁊ tres octaue/ ⁊ vna sexagesimaquarta vni⁹: cōtinent octo semel et minus octonoꝝ dimidio. ergo per decimam huius ⁊ a cōtinet d semel ⁊ minus eius dimidio. est itaqꝫ interuallum a ad b minus sesqualtero interuallo.

Quattuor sesquioctaui coniūcti: sesqualterum superant interuallum. 19

6561				4096	A e quattuor sesqui=
a	b	c	d	e	octaui coniūcti.

Sint a b c d e quattuor ꝯiūcti sesquioctaui: a ad b primus/ b ad c secundus/ c ad d tertius/ ⁊ d ad e quartus: dico qm̄ intuallum a e amplius est sesqualtero intuallo. Nam vt in precedēti visum est octo a equi sunt vndecim d/ tribus octauis/ ⁊ vni sexagesimequarte vnius. et vndecim d/ tres octaue vnius ⁊ vna sexagesimaquarta: equātur duodecim e/ sex octauis/ quattuor sexagesimisquartis/ ⁊ vni quingentesime duodecime. ergo octo a equi sunt duodecim e/ sex octauis/ quattuor sexagesimisquartis/ et vni quingētesime duodecime. Atvero duodecim/ sex octaue/ q̄ttuor sexagesimequarte/ et vna quingentesima duodecima cōtinent octo semel et amplius ꝙ̄ octonorum dimidium: qm̄ cōtinēt octo semel ⁊ dimidium: et insup sex octauas/ quattuor sexagesimasquartas/ ⁊ vnā quingentesimā duodecimam vnius. igitur per decimam huius a cōtinet e semel ⁊ amplius ꝙ̄ eius dimidium. supat itaqꝫ a e intuallum quattuor sesquioctauis ꝯiūctū: sesqualterum interuallum. quod erat monstrandum.

Quinqꝫ coniūcti sesquioctaui: minus duplici interuallo coniūgunt. 20

Nam p vndecimam huius duplex interuallum ex duobus maximis supparticularibus: sesqualtero scꝫ et sesquitertio ꝯiūgit. at ꝯstitutis quinqꝫ sesquioctauis tres ꝑmi sesquioctaui: per decimā octauā huius minus sunt sesqualto interuallo. ⁊ duo sequētes sesquioctaui qui vna cū tribus ꝑoribus quinqꝫ cō plent: per decimā septimam huius minus sunt sesquitertio. coniūgunt igitur quinqꝫ sesquioctaui minus duplici interuallo.

Sex proportiones sesquioctaue: maiores sunt vno duplici interuallo. 21

531441						262144	A g sex sesqui=
a	b	c	d	e	f	g	octaui coīūcti.

Sit a g interuallum sex ꝯiūctoꝝ sesquioctauoꝝ: ita vt a ad b sit primus sesquioctauus/ b ad c scd's/ c ad d tertius/ d ad e quartus/ e ad f quintus: f aūt ad g sextus. dico qm̄ a ad g amplius est duplici interuallo. Qm̄ enī a ad b sesquioctauus est: ergo per octauā huius octo a equi sunt nouem b. et nouem b per eādem equi sunt decem c/ ⁊ octaue vnius. et decem c ⁊ octaua vnius: equa sunt vndecim d/ tribus octauis/ et vni sexagesimequarte vnius. et vndecim d/ tres octaue/ et vna sexagesimaquarta vni⁹: equā tur duodecim e/ sex octauis/ q̄ttuor sexagesimisquartis/ et vni quingentesime duodecime. duodecim aūt e/ sex octaue/ quattuor sexagesimequarte/ et vna quingentesima duodecima: equantur tridecim f/ decem octauis/ decem sexagesimisquartis/ quinqꝫ quinḡgesimis duodecimis/ et vni quarte millesime nonagesimesexte. Atvero decem octaue vnū cōtinent integrum ⁊ insup duas octauas. quo fit iteꝝ vt duodecī e/ sex octaue/ q̄ttuor sexagesimequarte/ ⁊ vna quingentesima duodecima: equētur q̄ttuordecī f/ duabus octauis/ decem sexagesimisquartis/ quinqꝫ quingentesimis duodecimis/ et vni quarte mil= lesime nonagesimesexte. Atvero q̄ttuordecim f/ due octaue/ decem sexagesimequarte/ quinqꝫ quingēte sime duodecime/ et vna quarta millesima nonagesimasexta: equa sunt quīdecim g ⁊ octo octauis eius (hoc est equa sunt sedecim g) duodecim sexagesimisquartis/ quindecim quingentesimis duodecimis/ sex quartis millesimis nonagesimissextis/ ⁊ vni tricesimesecūde millesime septīgētesime sexagesime octaue. At sedecim ⁊ duodecim sexagesimequarte/ ⁊ relique sequētes particule: continent octo bis et amplius. igitur per decimā huius a ad g maius ē duplici intuallo. sex igit sesquioctaui maiores sunt vno duplici intuallo: vt intēdit ꝓpositio. Et si hec ꝓpositio quo ad suā demōstratiōēꝫ nōnullis sub= difficilior videat: hoc iccirco ꝓueniet ꝙ illis prōptitudo/ vtēdiqꝫ habilitas octaue/ none/ ⁊ decime hui⁹ deerit. iccirco par/ cōsentaneūqꝫ erit eos qui in musicis modulatiōibus ⁊ eaꝝ ꝯtēplatiōibus se exerci tare volent: multos sesqualteros/ deinde sesquitertios/ et alios sequentes supparticulares colligere: quousqꝫ vsus colligendaꝝ ꝓportionū ipsis iam sit factus puius/ patensqꝫ ⁊ q̄si iam ipis domesticus.

Primi Elementorum Musicalium finis.

C Onsonātia est soni grauis/acutiq; mixtura:suauit᷑/ vniformiterq; auribus
incidens:ex multiplici aut superparticulari ratione ꝑfecta [redacted].¶ Dissonātia
est duoꝝ sonorum non se natura suauiter miscentium : ad aurem ꝑueniens
aspera/iniocūdaq; percussio.¶ Tonus est consonātie principiū:ex soni ad
sonum sesquioctaua ꝓportione ꝑueniens.¶ Semitonium minus qđ et diesis dicit᷑ :
est toni pars:qua sesquitertia ꝓportio duobus tonis maior est.¶ Semitoniū maius
quam ꝛ vocant Apothomen:est toni reliqua ps : et qua ipē semitoniū minus sup̄at.
¶ Comma est quo sesquioctaua ꝓportio:duobus semitoniis mioribus maior est: qđ
et idem est quo Apothome semitonium minus vincit ac superat¶ Schisma est cōma
tis dimidiū.¶ Diaschisma ē dimidium semitonij minoris.¶ Hemispherium:musicū
est instrumētum per qđ aut neruo aut chorde vt decet suppositum:semitonia/tonos/
ꝯsonātiasq;/ꝛ consonātiarū particulas:ad sensum ꝑuestigamus. ¶ Sonus emmelis
is est quo apte vtimur in melo.¶ Ecmelis ꝟo is dicitur:quē melos/concentusq; non
admittit.¶ Equales soni atq; similes dicūtur:q̄ ex eadem interualli ꝓportione nascū
tur¶ Numeroꝝ atq; interuallorum pars ea maior est:que a minore nūero denoīat᷑.
et mior que denoīatur a maiore.¶ Multiplex ꝓportio maior est:quā maior denoīat
numerus.et minor : que denoīatur a minore.¶ Superparticularis ꝓportio maior est:
que a maiore denomiatur parte.minor aūt:que denominatur a minore.

1 ¶ Tonum super datam chordam collocare.

A	c							b

¶ Sit a b c chorda quecūq; supra quā iubeamur tonū collocare:diuido ꝑ tertiam petitionem chordā a b in nouem equas portiones:ita vt c b illaꝝ nouenarū octo teneat ꝛ a c vnam. dico q̄m a b ꝛ c b tonū ꝯtinēt/ꝯstitutūq; supra datā chordam esse tonum. Nā totū chorde spaciū a b ꝯtinet spaciū c b ꝛ insuꝑ octauam eius partē:q̄ a c vni illaꝝ octauaꝝ equa sit.igit᷑ per diffinitiōem spaciū a b epogdoū:sesquioctauūq; est spacio c b.quare per primam petitiōem ea erit soni totius chorde a b ad sonum c b ꝓportio.Est itaq; tonus in chorda a b qui in epogdoa/sesquioctauaq; ratione consistit:collocatus.

2 ¶ Tonum tono et quotquot libuerit:in data chorda subiungere.

A	c	d	e									b

¶ Sit data chorda a b in qua ꝓpositum sit tres ꝯsequētes tonos subiūgere partior per tertiam petitionem vt in precedēti factum est spaciū totius chorde a b in nouem equas portiōes.et in nota octaue portionis pono c:ita vt b c octauas illaꝝ nouem partium teneat. manifestū est per precedētem a b ꝛ c b esse tonum.et per eādem petitiōem partior spacium c b in nouem equas portiōes.et in terio octaue particl̄e pono d:itavt d b ꝯtineat octo eaꝝ partium quaꝝ c b nouem ꝯtinet.per precedentem c b ad d b sonat tonum/estq; iam vni tono:tonus vnus subiūctus. Rursum spacium d b ꝯsimili modo in nouem equas portiōes diduco:ꝛ notam octaue sectionis littera e designo:ita vt e b octo eaꝝ partiū cōtineat: quaꝝ d b ꝯtinet nouem per precedentem d b ad e b resonat tonum.sunt igitur in data chorda a b tres ꝯtinue subiūcti toni:scʒ a b/c b.c b/d b.d b/e b.qđ erat ꝓpositum.et hoc pacto quotquot lubet subiūgere q̄ facillimū est.Et si id sensu experiri/deprehēdereq; cupias post pulsuʒ toti⁹ chorde a b suppone hemispherium chorde a b in signo c:ita vt sola perstrepat resonetq; particl̄a c b et sensus iudicio dep̄hendes soni totius a b ad sonū c b esse toni īteruallū.q̄ si hemispheriū trāsferes ad notam d: ex pulsu c b ꝛ d b iteꝝ tonum deprehēdas.sed ex totius a b sono ad sonū particule d b duos tonos/duorūq; tonorum interuallū perpendet auditus.et hoc pacto sensuum iudicijs quotq̄t voles tonos dep̄hendēdos cōmitteres:et eoꝝ mixturas tum suaues/tum incōcinnas (quas auditus tanq̄ offensus horret refugitq;)decernendas.

3 ¶ Tonorum continuatorum:minimos numeros assignare.

59049	52488	46656	41472	36864	32768	Quinq; tonorum adinuicem conti-
n	o	p	q	r	s	nuatorum minimi numeri.
6561	5832	5184	4608	4096		Quattuor tonorum adinuicem cō-
h	i	k	l	m		tinuatorum minimi numeri.
729	648	576	512			Trium tonorum adinuicem conti-
d	e	f	g			nuatorum minimi numeri.
81	72	64				Duorum tonorum adinuicem con-
a	b	c				tinuatorum minimi numeri.

¶ Si duo/tres/q̄ttuor/quinq; aut quotlibet toni sint ꝯtinue in neruo ꝯstituti:sic eoꝝ mimos nūeros reperiemus.Q̄m eni nouem ꝛ octo mimi sunt numeri toni duco nouem in se ꝛ ꝑueniat a: ꝛ nouem in

octo ⁊ ꝓueniat b: ⁊ octo in se ⁊ ꝓueniat c. per vicesimãtertiã tertij Arithmetices int̃ a b ⁊ b c sunt duo sesquioctaui in mĩmis numeris ↄiũcti / ⁊ ꝓinde duo toni in mĩmis numeris ↄtinuati. Et si nouẽ duco in a b c et octo in c et surgant d e f g. per eandem inter d e f g tres sunt in mĩmis numeris sesquioctaui cõstituti: quare d e f g sunt trium cõtinuatoꝝ tonorum mĩmi nũeri. Et si ducis nouem in d e f g et octo in g et surgãt h i k l m per idem qđ prius h i k l m quattuor ↄtinuoꝝ sesquioctauorũ mĩmi sunt nũeri: quare ⁊ quattuor cõtinuorũ tonorum. Et si rursum hoc pacto ducis nouem in h i k l m et octo in m et surgant n o p q r s: ipsi erũt quinqꝫ cõtinuorũ tonorum mĩmi numeri. et hoc modo quotquot tonorum voles mĩmos numeros reperias. Attamen in modis musicis tot cõtinue subiũgere opus non est: sed tonis semitonia subiũgunt̃: de quibus posterior ꝓprius / accõmodusqꝫ expectãdus est sermo.

Spacio quolibet per quotlibet equa spacia diuiso: totius ad totam ꝓxime sectiõis partem minor est ꝓportio: q̃ eiusdẽ partis ad totam reliquã ꝓxime sectiõis partem. Quo fit vt quanto tonus tono subiũgit̃ acutior: tanto ipm̃ ↄtractiora ↄtineãt spacia. 4

A	c	d	e	f	g	h	i	k	b

Chordam / neruũ / tibiam / eflatũ aera / es tinnulũ ⁊ quodq̃ sonũ edit in harmonicis modis (vt iam quoqꝫ dictũ est) spacium nũcupamus: in quibus analogie ratio vim / naturãqꝫ seruat eãdem. Sit ergo a b totum spacium per a c / c d / d e / e f: ⁊ reliquas nouem equas partes vt fit in interuallo toni habendo diuisum: quotq̃t enĩ alias posueris idem valuerit. dico minorem eẽ ꝓportiõez a b ad c b q̃ c b ad d b. Nam cũ a b positũ sit in nouem equas partes per medias notas c d e f ⁊ reliquas diuisum: c b cõtinet solũ eaꝝ partiũ octo: quaꝝ a b ↄtinet nouem. ergo a b ↄtinet spaciũ c b et eius octauam partem. sed ⁊ cũ c b octo partes parti c d equas ↄtineat: ergo d b ↄtinet partiũ totaꝝ solũ septẽ. ergo c b ↄtinet spacium d b ⁊ insup̱ eius septimã partem. at octaua p̱s per diffinitiõem minor ẽ parte septima: igit̃ iteꝝ per diffinitiõem a b ad c b ꝓportio supparticularis minor est q̃ c b ad d b vtpote q̃ a minore parte denoĩetur. est enĩ hec a septima parte sesquiseptima ꝓportio: illa vero ab octaua sesquioctaua. Et hãc nõ modo in supparticlarib⁹: verũ ⁊ quibuslibet medietatibus demõstrat p̃ma decimi Arithmetices vbi scꝫ ratio medietasqꝫ arithmetica cõperiat̃. qđ ⁊ in dicta spacij diuisiõe ⁊ sumpta (vt ꝓpositũ est) ꝓportione: inuentũ ↄspiciebat̃. Correlariũ vero hinc cognoscat̃ q̃ totũ per quartam petitionem ad suam partem graui⁹ sonat: pars aũt ad suũ totũ acutius. Itaqꝫ si tono a b ⁊ c b tonũ subiũxeris: subiũctus erit acutior. Et qm̃ spaciũ c b in nouem equas partes partiret̃: quaꝝ quelibet mĩor erit spacio c d qđ eius octaua est: nam quelibet caꝝ est nona ⁊ a maiore nũero denoĩata. erit igit̃ ⁊ quelibet eaꝝ nouem partiũ minor spacio a c. equa sunt enĩ a c et c d. et hoc pacto de q̃buslibet subiũctis acutiorib⁹ tonis eẽt dicẽdum. manifestũ est igit̃ vt quãto tonus tono subiũgit̃ acutior: tãto ipm̃ ↄtractiora ↄtineãt spacia.

Medio extremitatũ toni spacio in duo equa diuiso: ton⁹ mĩme in duo secat̃ eq̃lia. 5

A	c	d	e	f	g	h	i	k	b
l	m	n	o	p	q	r	s	t	

Hec ⁊ sequentia intelligũtur vt tonus mĩme in duo equa ratione geometrica dirimat̃: non autem arithmetica. nam ⁊ hic tonus toniqꝫ interuallum in duo equa rõne arithmetica direptum est. diuido ergo spacium a b vt prius in nouem equa spacia: per notas a / c / d / e / f / g / h / i / k / b manifestũ est a b ⁊ c b esse toni extremitates / tonũqꝫ cõtinere. dico ergo qm̃ a c medio harũ extremitatũ interstitio in duo equa p̱ signum l direpto: tonus mĩme in duo equa partiat̃ / q̃qꝫ sonus a b ⁊ l b equalis non sit l b ⁊ c b. diuido enĩ singula reliquoꝝ octo equaliũ spaciorũ ↄsimili modo p̱ equalia per notas m / n / o / p / q / r / s / t: manifestum est totũ spacium a b diuisum eẽ in 18 equalia spacia que sunt a l / l c / c m / m d / d n / n e / e o ⁊ reliqua. ergo per precedẽtem mĩor est ꝓportio a b ⁊ l b q̃ l b ⁊ c b. est enĩ hec sesquisextadecima: illa vero sesquiseptiadecima. non est ergo tonus hoc pacto in duo equa diuisus. et soni a b l b / ⁊ l b c b p̱ diffinitiõem adinuicem inequales: quiquidem soni ecmeles sunt / musicoqꝫ melo perparũ apti.

Toni spacio hoc modo diuiso: totius medie sectionis sonus: maioris extremi toni sonum acumine: minoris vero grauitate superat. 6

A	c	d	e	f	g	h	i	k	b
l									

Sit a b vt in precedẽti iam dictũ est diuisum: ita vt a b ad c b recrepet tonum. dico qm̃ sonus l b acumine superat sonũ a b / q̃qꝫ idem sonus l b grauitate vincit c b. Nam a b totum est ⁊ l b eius pars: ergo per quartam petitionem a b grauiorem sonũ edit ⁊ l b graciliorem. et per eãdem qm̃ l b totũ est ad c b: sonus l b grauior est sono c b. superat ergo l b maius toni extremum acumine: ⁊ minus grauitate. quod propositum erat demonstrandum.

Tonum in duo equa: certo / cõstitutoqꝫ numero diuidi impossibile est. 7

Nam per quintam primi huius nullũ supparticulare interuallum in plura equalia dirimit̃: ⁊ que ꝓportio spaciorũ int̃ualli inter se ea quoqꝫ est ⁊ soni ad sonum. Atqui tonus ex supparticulari nascit̃ interuallo. nascit̃ enĩ ex epogdoa / sesquioctauaqꝫ ratõe. igitur tonus mĩme in duo equalia dirimitur / diuidit̃qꝫ. imo vero neqꝫ in plura duobus equa: vt in tria aut quattuor. Ex quo facile cognoscit̃ Aristoxenus musicus auriũ iudicio cuncta cõmittẽs perparũ eẽ ꝓbãdus. qui semitonia secus q̃ Pythagorici non arbitrat̃ esse dimidio tono ↄtractiora: sed quẽadmodũ semitonia dicũtur: ita quoqꝫ et esse integra tonorum dimidia. Nec minus Martianus felix simili lapsus errore deprehẽdit̃: qui nõ modo

tonum in duo equalia:sed ⁊ in tria|⁊ quattuor dirimit atq̧ secat. Secat enim in primis tonum in duo equalia q̄ iccirco hemitonia vocat. Secũdo in tria ⁊ earum tertiarum quãlibet diesim tritemeriã nũcupat. Tertio in quattuor et hãc toni partem quartã :vocat diesim tetrartemeriam:ꝙ he dieses nunc tertie nũc quarte toni sunt partes. Est enĩ tritos tertius|tetrartos quartus|⁊ meros pars. Ponit ⁊ tertiam dieseos acceptiõem vt eaipsa toni tertia ⁊ tertie dimidia pars dicatur. Et rursum primi modi primeq̧ acceptiõis dieses:chromaticas vocat|secũdas vocat enermonicas|tertias vero enarmonice diuisionis hemiolias:partim Aristoxeno similiter:partim aũt dissimiliter. Similiter quidẽ ꝙ Aristoxenus toni dimidiũ semitoniũ ponat et toni tertiam diesim chromaticam vocet sed chromatis molis:⁊ toni quartã diesim enarmonicam.at dissimiliter ꝙ toni quartam cũ ꝓpria quarte medietate vocet diesim chromatis hemiolii. Et certe vel Martianus in tertia dieseos acceptiõe nouo errore lapsus putãdus est:vel eũdem putasse hemitoniũ ⁊ diesim enarmonici hemiolii idem esse.nam cũ omne totum tribus suis tertiis integretur: vnam ergo tertiarum ⁊ tertie medietatem totius dimidium implere necesse est. Sed cũ hec se satis falsa esse ꝓbant|⁊ nulla sui parte cohereãt:nõ est cur in his diutius sermo sit ꝓtrahẽdus. Sic enĩ qui stolidũ sensus iudicium sequẽtes intellectum relinquũt:facile ex disciplinarum aditis se explosos sentiunt.

8 ¶ Quicunq̧ numerus in terminos toni ducatur:interuallum toni relinquet.

¶ Nam cum tonus ⁊ toni interuallum in ꝓportione sesquioctaua cõsistat: sui termini erũt nouem ac octo aut quicũq̧ alii qui sibi sibi ꝓportiõe respõdeant. At cũ per septimã secũdi Arithmetices:si vnus idẽq̧ numerus duos multiplicet ꝓductorũ ⁊ multiplicatorũ eadem sit ꝓportio:ergo quicũq̧ nũerus ducitur in terios sesquioctaue:sesquioctauam ꝓducet|relinquetq̧ tonum atq̧ toni interuallũ.quod est ꝓpositũ. Et nõ modo de sesquioctauo ⁊ toni interuallo id sentiẽdum est:sed ⁊ de quolibet alio interuallo.

9 ¶ Omnis numerus:extremorum toni differentia constitui potest.

¶ Si enĩ tonus in minimis cõstituatur vt sunt nouem atq̧ octo monas differentia est:cũ nouenarius atq̧ octonarius sola vnitate dissentiãt. Et si ducatur binarius in nouenariũ ⁊ octonarium et ꝓducãtur a ⁊ b per precedẽtem a ⁊ b erũt toni extrema. At vero per nonam primi Arithmetices quod fit ex binario in nouenarium tm̃ est q̄tum quod fit ex binario in octonarium ⁊ vnitatem.sed binarius in vnitatem per cõmune ꝓloquiũ seipm ꝓducit:igitur extremorum toni a ⁊ b binarius differẽtia cõstituitur. Et si ducatur ternarius in nouem ⁊ octo:eodem quoq̧ argumẽto ternarius extremorũ toni differẽtia cõstituetur. Et ita quicũq̧ alter numerus in eosdem minimos toni terios ducetur:idem extremorum toni differẽtia cõstituetur. Manifestum itaq̧ est oẽm numerum extremorũ toni differẽtiam cõstitui posse. Et quãq̄ ita est placuit tñ Philolao Pythagorico primordiũ toni/primordialẽq̧ eius dr̃iam ternarium cõstituere: qui p̄mus cubũ a p̄mo impari numero ꝓcreat/ac gignit. ꝙ is numerus apud Pythagoricos maxĩe honorabilis fuerit. Nam cũ ternarium primũ quidẽ imparem nũerũ tertio duxeris:nouem cõsurgũt. que ter ducta septem supra viginti:sc3 cubum a p̄mo impari reddunt.at 27 ad 24 tono distant/toniq̧ claudũt interuallum:et horũ differẽtia ternarius cõstituitur.est enĩ ternarius summe 24 pars octaua:q̄ eidem adiecta summe:primũ a ternario cubũ rursus instaurat atq̧ perficit. Et idem Philolaus summã septem ⁊ viginti in duas partes secuit 13 ⁊ 14 quarum hec maior/illa vero minor habetur/et hãc primordiũ Apotomes facit:q̄ est toni portio maior :illam aũt facit principium dieseos:que est toni decisio minor atq̧ portio:⁊ quã posterius semitoniũ minus nũcupabimus.et illarum duarũ partium differẽtiam que est vnitas facit cõmatis principium. Sed de his satis.

10 ¶ Numeri dati partem quotãcunq̧ reperire. Quo fit vt cuiuslibet nũeri pars ab ip̃o sit numerata:et a denoiante eiusdem partis sit denominata.

272	17	306	18	136	17
c	d	g	h	m	n
17	16	18	17	17	8
A	b	e	f	k	l

¶ Quãuis enĩ numerorum numerãtium qui exẽplares in aĩa sunt:vnitas insecabilis existat:nũerorum tñ numeratorum quales in physicis sunt motuũ nũeri/in geometricis linearum ⁊ planorũ/in astrologicis temporũ/in musicis aũt tonorũ atq̧ interuallorũ vnitas aut verius vnum sectiõem recipit. Sit ergo a quicũq̧ numerus cuius vna partium denoĩata ab b q̄sita sit:resoluo a in oms suas partes denoĩatas ab b:ducendo sc3 denoĩantem numeri a in denoĩantẽ partis b:ita vt ꝓueniat c. manifestũ est partes c simul denoĩatas ab b equari toti numero a.diuido igitur c per b ⁊ ꝓueniat d:dico d esse partẽ petitam/⁊ numeratam ab a.hoc est a nũero denoĩante a. Q3 ei sit pars a denoĩata ab b q̄ petita erat:patet q2 a in d per septimam petitiõem reproducit c:quare d est pars c denoĩata ab b.at c equatur a.igitur ⁊ d pars est a denoĩata ab b. Sed ⁊ ꝙ d numeretur ab a:p3.q2 a in b ꝓducit c:ergo per sextam petitiõem c diuiso per b redibit a.sed ⁊ eodẽ c diuiso per b p̄us veniebat d.numerat igitur a semel d.et sic ꝓpositio atq̧ suũ correlarium nota sunt. ¶ Et q̄uis hec vt mõstretur perfacilis sit:vsus tñ eius aliquãto latẽtior:quem exẽplaris deductio facile cuiq̧ reddet illustriorem.vt quesita sit vbi causa sũme decem et septẽ pars sextadecima duco vtriusq̧ denoĩantes in seinuicem.hoc est 17 et 16 et surgẽt 272 sextedecime. tot enĩ sextasdecimas cõtinet numerus 17 resolutus.diuido ergo 272 per 16 ⁊ ꝓueniẽt 17 sextedecime:q̄ erũt totius summe partium 272 pars sextadecima.quare ⁊ numeri 17 pars itidẽ sextadecima.at 17 sextedecime vnitatem cõtinent ⁊ vnã sextãdecimã.est itaq̧ vnitas ⁊ vna sextadecima:dati numeri 17 pars sextadecima . Et si numeri decem ⁊ octo quereretur pars septimadecima duco decem et octo in decem

⁊ septem et ꝓductum diuido per 17 et veniẽt 18 septimedecime: que vnum cõplent integrum/ vnam septimãdecimam. Est ergo vnitas ⁊ vna vnitatis septimadecima date summe decem ⁊ octo pars vna septimadecima. Si vero summe decem ⁊ septem volo partem octauã reperire: duco 17 in octo ⁊ qđ ꝓductum fuerit diuido per octo ⁊ ꝓueniẽt 17 octaue q̃ duas vnitates ⁊ vnam octauam efficiũt. erũt ergo duo ⁊ octaua vnius totius sũme decem ⁊ septem pars octaua. qđ querebať. Et ita in quibuslibet se quiuis valeat exercitare: habent tñ q̃ particulari/ exẽplariq; demõstratiõe sunt ostensa: ad sequentia põdus ac momentum.

Si duo inequales numeri ad eundem minorem comparentur: maioris ad ipsum maior est proportio/ et minoris minor. 11

9	8	7
A	b	c

Assint a b duo inequales nũeri quoꝝ a sit maior/ et b minor: qui comparẽtur ad eũdem minorem c. dico a ad c maiorem eẽ ꝓportiõem q̃ b ad c. Nam cũ per octauam petitiõem extremoꝝ a ad c ꝓportio ꝯposita sit ex ꝓportiõibus a ad b ⁊ b ad c vt suis partibus: ergo ꝓportio b ad c pars est ꝓportiõis a ad c et ꝓportio a ad c totũ. et cũ per vltimũ cõmune ꝯloquium Omne totũ maius sit sua parte: igitur ꝓportio a ad c maior est ꝓportione b ad c. et ita de quibuslibet aliis simili argumẽto est agendum.

Sesquisextadecima ꝓportio: integrum toni dimidium superat. 12

A	c	d	e	f	g	h	i	k	b
l	m	n	o	p	q	r	s	t	

Quinta huius monstrauit medio extremoꝝ toni spacio in duo equa diuiso: tonũ minime in duo equa geometrice partiri: et sectionem hinc ⁊ inde altrinsecus sesquiseptimãdecimã/ et sesquisextãdecimã retinere ꝓportiõem. Hec vero ostẽdit sesquisextãdecimã ꝓportiõem que illic ex parte intensionis acuminisq; relinquiť: hemitonio/ integroq; toni dimidio esse maiorem. et sequẽs mõstrabit sesquiseptimãdecimam ex grauiori parte sumptam: eodẽ toni dimidio esse minorem. Sit ergo vt in quinta huius spacium a b in decem ⁊ octo equas partes per a c d e f ⁊ reliquas notas diuisum. ita vt a b eaꝝ partiũ ꝯtineat decem ⁊ octo/ ⁊ c b sedecim/ ⁊ l b decem ⁊ septem. manifeũst est a b ⁊ c b vt prius visum est esse tonum: et l b 17 ad c b 16 eẽ sexquisextãdecimã quã habitudinem dico esse integro semitonio maiorẽ. qm̃ eni per decimam huius vnitas ⁊ sextadecima vni⁹: est summe decem ⁊ septem pars sextadecima. q̃ si eidẽ sũme adiiciať fient decẽ ⁊ octo/ et sextadecima vnius. at octodecim ⁊ sextadecima vni⁹ ad decẽ ⁊ septem ꝑ diffinitiõez est sesquisextadecima. Sunt ergo decẽ ⁊ octo ⁊ sextadecia vnius ad decẽ ⁊ septem et decem ⁊ septem ad sexdecim due ꝯiũcte sesquisextedecime. sed decem ⁊ octo ⁊ sextadecima vnius: ꝑ precedentem maior est sesquioctaua ad sedecim. Nam decem ⁊ octo ad sedecim vt prius visum est: sesquioctaua est. igiť sesquisextadecima bis aucta tonum/ toniq; interuallum trãscẽdit. quare ꝑ nonum ꝯloquiũ sesquisextadecima ꝓportio integrũ toni dimidium superat. quidq̃ eni bis auctũ trãscendit aliq̃d: id vltra eius dimidium eẽ necesse est. Ex quo valẽtiore iure cognosciť sesquiquintamdecimam ⁊ oẽm proportiõem sesquisextadecima maiorem: integrum toni dimidium superare.

Sesquiseptimadecima: minor est integro toni dimidio. 13

19	1	19	1	18	17	A ad b sesquidecimãseptimam ꝓportionem
d	8	c	17	a	b	ꝯtineť: q̃ integro toni dimidio ꝯtractior est.

Sint a decem ⁊ octo interualli partes ⁊ b decem ⁊ septem/ c decem ⁊ nouem ⁊ vna septimadecima/ d vero decem ⁊ nouem ⁊ vna octaua. per decimã huius a ad b est sesquiseptimadecima. et c ad a similiť sesquiseptimadecima. sunt ergo c ad b due sesquiseptimedecime adinuicem coniũcte. sed et ꝑ eandem d ad b sesquioctaua est atq; tonus. d eni cõtinet b ⁊ eius partem octauam. at d ad b ꝓportio maior est ꝓportiõe c ad b. nam vnius ꝑs octaua maior est vna septimadecima. ergo sesquiseptimadecima ꝓportio per decimum ꝯloquiũ minor est integro semitonio. qđ eniz duplatũ non implet integrum: neq; id quoq; continet dimidium. Est ergo notum sesquiseptimãdecimam ꝓportionem integro toni dimidio esse minorem.

Integram toni medietatem: inter sesquisextamdecimam ⁊ sesquiseptimãdecimam proportiõem cadere necesse est. 14

Nam per duodecimam sesquisextadecima maior est toni dimidio: ⁊ ꝑ decimãtertiã minor est eodẽ toni dimidio. at per cõem sciẽtiam inter maius atq; minus dimidio: ꝓpriũ dimidiũ cõsistere necesse est. ergo integrum toni dimidium inter sesquisextãdecimam et sesquiseptimãdecimam cadere necesse est. Sed id in noto/ integroq; numero nullo pacto vt septima huius mõstrauit fieri cõtinget: vt neq; in geometricis diameter quadrati: eius coste certo/ ꝯstitutoq; numero cõmensurari potest. Sed hoc vltim ex altero loco requirendum est.

Semitonium minus: duobus tonis in chorda subiũgere. 15

| A c | d | e | | | b |

¶ Intelligit semitonium subiūgi qñ ex acutiori parte duob⁹ quidē tonis ad grauiorem ptē relictis ipm semitonium collocat. preiūgi vo qñ ipm ex parte remissiori duob⁹ tonis adhibet. Cōtinuo ergo per scdam huius duos tonos in chorda a b per notas a c d b. sitq; a b c b: primus. et scds sit c b. d b qui quia per diffinitiōem in sesquioctaua ꝓportiōe consistūt: et per decimāseptimā primi hui⁹ due sesquioctaue minores sunt sesquitertia ꝓportiōe. erit ergo a b et d b minus sesquitertio. diuido ergo a b in quattuor partes equas: et initiū tertie sectiōis, facio notam e. ita vt e b tres eaꝝ quartaꝝ cōtineat: per diffinitiōem igitur a b ad e b sesquitertia ꝓportio est. sed sesquitertia ꝓportio a b ⁊ e b superat duos tonos a b et d b in proportiōe d b et e b. est igit d b et e b per descriptionem semitoniū minus duobus tonis: vt propositum erat subiunctum.

16 ¶ Semitonium minus: duobus tonis preponere.

| A e | d | c | | | | | | | b |

¶ Facio a b ad c b sesquitertiū interuallū et diuido c b in octo equas partes et supra c versus a: facio d c vni eaꝝ octo partium equā: ita vt d b eaꝝ partiū nouem ꝯtineat. et per diffinitiōem d b ⁊ c b vnum ꝯstituūt tonum. Similit diuido d b in octo equas partes: et vnā eaꝝ adiūgo supra d ꝑ notam e. quare iteꝝ e b ⁊ d b erit tonus. suntq; duo toni e b et c b. sed a b et c b sesquitertia ꝓportio: maior est duobus illis tonis in ꝓportione a b ⁊ e b. est igitur per diffinitionem a b ⁊ e b semitonium minus. qd cum sit duobus tonis prepositum: qm̄ ex parte remissa illis adiūctum. factum est propositum.

17 ¶ Duobus tonis: diesim/ semitoniūq; minus interponere.

| A d e c b |

¶ Idem diesim atq; semitoniū minus hic (vt iam quoq; dictum est) intelligimus. Sit ergo a b ⁊ c b vt in precedenti sesquitertia ꝓportio in tota chorda a b. ab a: cversus: intēdo tonum per notam d. et ab c versus a remitto tonū vt in precedēti factū est per notam e: ita vt a b et d b sit tonus/ et similit e b et c b tonus. manifestum a b et c b sesquitertiā ꝓportiōem superare duos illos tonos in media ꝓportiōe d b et e b. est igitur per diffinitionem d b et e b semitoniū minus duobus tonis interceptū et ꝓpositū.

18 ¶ Semitonij minoris mīmos numeros reperire: et quomodolibet semitoniū minus in chorda vna aut pluribus collocare.

324	288	256	243
f	g	h	k
81	72	64	
c	d	e	
9	8		
a	b		
4	3		
l	m		

¶ Sit a nouenarius ⁊ b octonarius minimi numeri toni. duco a in se/ et a in b/ et b in se et cōsurgant numeri c d e. inter quos per sextam quarti Arithmetices erūt duo sesquioctaui/ duoq; toni in mīmis ꝯtinuati. Sit preterea l quaternarius et m ternarius. duco l in c d e ⁊ prodeāt f g h: inter quos ꝑ septimā secūdi Arithmetices similit cōiūcti sunt duo sesquioctaui/ ⁊ ꝓinde duo toni. duco preterea itidē m in c et ꝓueniat k ꝑ octauā secūdi Arithmetices f ad k est ꝓportio sesquitertia q̄ ꝑ 17 primi hui⁹ maior est f h et differētia ē h k. dico ergo h k esse mīmos nūeros semitonij minoris. ꝙ enī sint numeri semitonij minoris per diffinitiōem notū est. sed ꝙ mīmi: id iam declarandū est. Nam qr c e sunt in sua ꝓportiōe mīmi: per decimāoctauā tertij Arithmetices sūt ꝯtra se pmi. et qr etiā l ⁊ a quaternarius ⁊ nouenarius sunt cōtra se primi. ergo per vndecimam tertij Arithmetices l est pmus ad c. et per decimā eiusdem h quī nascit ex l ⁊ e pmis eidē numero c: erit primus ad c. Rursus m ⁊ b ternarius atq; octonarius sunt adinuicem pmi. ergo ꝑ vndecimā tertij ⁊ m primus est ad e sed ⁊ cū l/ m quaternarius ⁊ ternarius sint etiā primi: ergo per decimam eiusdem m etiā primus est ad h. Cū ergo c ⁊ m mōstrati sunt primi ad h ergo per eādem decimā tertij numerus k ex c ⁊ m ꝓductus: primus est ad h. sunt itaq; h ⁊ k semitonij minoris numeri adinuicem primi: quare per vicesimam tertij Arithmetices in sua ꝓportione mīmi. qd est ꝓpositū quo ad hoc. Et data quacunq; chorda si eā diuides scdm nūerū h ⁊ eaꝝ partiū accipias scdm numerum k numeros scz semitonij minoris vbilibet in eadem chorda ꝯstitutū erit semitonij minoris interuallum. In diuersis aūt facillime idem feceris: si eas chordas equales eq̄liter tensas vnisonasq; posueris/ et partiaris eaꝝ quācūq; voles scdm h quaꝝ partium alterius acceperis scdm k erit tum in pluribus chordis semitonij minoris constitutum interuallum. quod est totum propositum.

19 ¶ Semitonium minus in minore q̄ sesquiseptimadecima sit: proportione consistit. Quo fit vt regula semitonij sumendi: non sit differētiam extremoꝝ toni in duo equa partiendo.

324	288	257 5	256	243
f	g	l 17	h	k

¶ Sint vt in precedenti h k minimi numeri ſemitonij minoris vt ducenta quinquaginta ſex ⁊ ducēta quadraginta tria. capio ꝑ decimam huius: ſeptimādecimā partem nūeri k ducentorū ſcꝫ quadrginta trium / eritqꝫ quattuordecim ⁊ quinqꝫ ſeptimedecime. addo itaqꝫ quattuordecim et 5 ſeptīaſdecimas ad k ⁊ fiat l numerus 257 et 5 ſeptimedecime. erit ergo nūerus l ad k ſeſquiſeptimuſdecimus. at l ducēta q̄nquaginta ſeptē et q̄nqꝫ ſeptiedecime trāſcēdit h qui ſolū eſt ducētorū q̄nquaginta ſex. ꝯſiſtet itaqꝫ ſemitoniū minus per vndecimam huius in miore ꝓportiōe ꝙ ſit ꝓportio ſeſquiſeptimadecima. quare et a fortiore in minore cōſiſtit ꝓportiōe ꝙ ſit ſeſquiſextadecima. Correlarium hinc notum eſt. Nam hoc pacto partiēdo extremorū toni ſpacium: ex quīta huius cognoſcūtur ſeſquiſextadecīa atqꝫ ſeſquiſeptimadecima altrinſecus conſtitui: quaꝝ vtraqꝫ preſens mōſtrauit ſemitonij minoris habitudinem eſſe minorem.

¶ Seſquioctauadecima proportio: ſemitonio minore rurſus maior euadit. 20

256 1	256	243
c 2	a	b

¶ Sint a b mīmi numeri ſemitonij minoris per decimāoctauā huius reperti ſcꝫ ducēta quinquagīta ſex / et ducenta quadraginta tria. capio per decimā huius octauā decimā partem nūeri b: quā reperio eſſe tridecim ⁊ ſemis: quā quidē addo numero b / fiatqꝫ aggregatus c. tunc c ad b ſeſquioctauadecima ꝓportio eſt. at c maior numerus eſt a. nam a dūtaxat cōtinet ducenta quinquaginta ſex: c vero equaliū partiū totidē ⁊ inſuꝑ ſemiſſem vnius. eſt igit̄ ſeſquioctauadecima ꝓportio ſemitonio minore maior.

¶ Seſquinonadecima: eſt ſemitonio miore minor. Quo fit vt ſemitoniū minus inter ſeſquioctauādecimam / et ſeſquinonamdecimam conſiſtat collocatum. 21

256	255 15	243
A	c 19	b

¶ Sint vt prius mīmi termini ſemitonij minoris a et b: dico ſeſquinonādecimā ꝓportiōem minorem eſſe ꝓportione a ad b. capio enī per decimam huius: nonādecimā partem numeri b: quā inuenio eſſe duodecim ⁊ quindecim nonaſdecimas. quā partem adijcio numero b ⁊ fiat c. ꝓportio c ad b eſt ſeſquinonadecima. ſed a maius eſt ꝙ c. igitur ꝑ vndecimam huius maius eſt ſemitoniū minus ſeſquinonadecima ꝓportiōe / atqꝫ ſeſquinonadecima ꝓportio ſemitonio minore minor. Correlariū vero vt decima quarta huius notum eſſe poteſt.

¶ Semitonium maius: in data chorda conſtituere. 22

D a	c							b

¶ Sit a b ⁊ c b ſemitonij minoris interuallum. diuido c b in octo partes equas: quibus equam facio partem c d. ita vt d b nouem ꝯtineat. ergo d b ⁊ c b erit tonus. demo igitur a tono d b et c b ſemitoniū minus ſcꝫ a b ⁊ c b / relinquet̄qꝫ d b ⁊ a b toni reliqua pars ⁊ qua ip̄e ſemitonium minus ſuperat. igit̄ per diffinitiōem d b ⁊ a b ſemitonium maius eſt in data chorda (vt ꝓpoſitū erat) cōſtitutū. et quēadmodum ſemitonium maius collocaſti ad partem grauiorem ita quoqꝫ ad partem acuminis collocare facillimum eſſet.

¶ Semitonij maioris: minimos numeros reperire. 23

2187	2048			1944
e	d			c
	256			243
	a			b
			8	
			f	

¶ Sint a b minimi numeri ſemitonij minoris ex decimaoctaua huius reperti et f octonarius. qm̄ ex demōſtratiōe decimeoctaue huius f octonarius primus eſt ad b. ergo f non numerat b. non habet igitur b octauam partem. duco igitur f in b et a et cōſurgant c d: per ſeptimam ſecūdi elementoꝝ Arithmetices d ad c vt a ad b. eſt igitur inter d c ſemitonium minus / ſemitonijqꝫ minoris interuallum. et qr̄ c habet ꝑtem octauā vt b: addo eidem nūero c ꝑtem octauam eius b: et coaceruatus fiat e. cōtinet igit̄ e numerum c / et partem eius octauam. quare e c tonus. et quia tonꝰ e c ſuperat ſemitoniū minus d c

2187
2048
139
102
37
28
9
1

interuallo e d:ergo e d sunt nũeri semitonij maioris. Qui autẽ iidẽ sint minimi facile ex decimaquinta tertij arithmetices cognoscas distrahẽdo d ab e et quod reliquũ fuerit iterum quoties potes distrahẽdo ab d. et hoc pacto deinceps et videbis ad vltimum relictam vnitatẽ erit quod modo qui ad latus apparet distractio. quare per eandem decimãquintam d et e sunt adinuicem primi. sunt igitur per vicesimam eiusdem in sua proportione minimi: quod est propositum.

24 **Semitonij maioris habitudo: sesquiquintãdecimam superat proportionẽ.**

2187	2184 8	2048	136 8
A	c 15	b	d 15

Sint a b minimi termini habitudinis semitonij maioris per precedẽtem reperti: dico habitudinẽ a ad b maiorẽ esse sesquiquitadecima. sumo enĩ vt in precedẽtibus iam sepe factũ est per decimã hui⁹ quintãdecimam partẽ numeri b et hec inuenitur centũ trigintasex et octo quintedecime vnius q̃ sit d adiicio ergo d ad b et fiat c: certũ est c ad b esse sesquiquitamdecimã. at c minor numer⁹ est q̃ a. est enĩ a numerus duum miliũ centũ octuagintaseptẽ. c autem solum duũ milium centũ octuagĩtaquattuor et fere semis paulo amplius. Est igitur per vndecimã huius semitonij maioris habitudo sesquiquĩta decima proportione maior eamque superans: quod est propositum.

25 **Apotomes interuallum: minus est sesquiquartodecimo interuallo. Unde manifestum est semitonij maioris proportionem inter sesquiquintãdecimam et sesquiquartã decimam reperiri collocatam.**

2194 4	2187	2048	146 4
c 14	A	b	d 14

Apotomẽ et semitoniũ maius: idem esse iam diximus. Sint ergo a b mĩmi nũeri semitonij maioris vt duo milia centũ et octuagintaseptẽ et duo milia quadragintaocto. sumo per decimã huius quartã decimã partem b scilicet duum miliũ et quadragintaocto quã inuenio esse centũ quadragintasex et quattuor quartedecime que sit d. addo eam quartãdecimam ad b: et fiat numerus aggregatus c. tunc numeri c ad b sesquiquartadecima proportio est. at c maior numerus est a siquidẽ duo milia quadragĩta octo et centũ quadragintasex et quattuor quartedecime summã simul attollant c: duum miliũ centũ nonagintaquattuor et fere quartã vnius. et a solum summa sit duum miliũ centum octuagintaseptẽ. constat ergo sesquiquartãdecimam proportionẽ maiorem esse semitonio maiore: atque propositum. Correlarium vt precedentium notum est.

26 **Semitonium minus atque semitonium maius in superparticulari proportione non cadunt: sed ea in superpartiente ratione consistere necesse est.**

Nam semitoniũ minus per correlariũ vicesimeprime huius cadit inter sesquioctauã decimam et sesquinonãdecimam. atqui inter sesquioctauãdecimam et sesquinonãdecimã nulla cadere valet intercepta mediaque superparticularis habitudo. sunt enĩ ille supparticulares proxime maior atque minor igitur semitoniũ minus in superparticulari ratione non consistit. neque per idem semitonium maius. Nam per correlariũ precedẽtis cadit in aliqua proportione media inter sesquiquintãdecimã et sesquiquartãdecimam duas proximas superparticulares: que superparticularẽ mediam nullã admittunt nõ igitur semitoniũ maius cadit in superparticulari ratione. sed et cum rationes semitonij minoris atque maioris multis superparticularibus vt iam visum est sint minores: erũt etiam minores ratione duplari que multiplicium minima est: vt que a minimo numero denominetur. nullus enim numerus binario minor. nõ est ergo semitonij minoris habitudo multiplex similiter neque semitonij maioris. relinquitur igitur a sufficienti diuisione cum ille sint inter maiorẽ terminum et minorẽ: eas esse in supparatienti genere. quod est propositũ. Id tamẽ propter sophistas aduertere licet q̃ tonus et sue partes cõsonantie et consonãtiarum partes intense: semper in supparticulari superpartiẽti aut multiplici habitudine cadunt: remisse vero in subsuperparticulari subsuperpartiẽti aut submultiplici. Atvero et si ita sit: soleums tamen eas omnes dicere esse in superparticulari habitudine superpartienti aut multiplici idem supparticulare et subsuperparticulare reputãtes et pro vno computantes. similiter superpartiens et subsuperpartiens et multiplex et submultiplex

27 **Musicum comma in chorda reperire.**

A	f	g	c	b
256		243		
d		e		

Sit a b chorda supra quam sit propositũ reperire musicũ comma: in qua a b et c b sit sesquioctaua proportio atque tonus. sint preterea d e minimi termini semitonij minoris. diuido spaciũ a b in partes equales secundũ d: ex quarum numero ab ipso b versus a: capio secundũ numerũ e et in termino earũ pono notam f. tunc que proportio d ad e: ea erit a b ad f b. quare a b ad f b semitoniũ minus. Rursum c b spactum seco in equas partes secundũ numerum e et earum partium ab ipso b versus a metiendo: sumo secundũ numerum d: et in earum termino pono notam g. manifestũ etiam est g b et c b esse semi

tonium minus. sed et cum a b et f b probatum sit etiam semitoniū minus. ergo interuallum f b et g b est quo sesquioctaua proportio a b et c b: maior est duobus semitoniis minoribus. est igitur per diffinitionem f b et g b inuentum musicum comma: quod erat monstrandum.

¶ Comma: in minimis numeris constituere. 28

531441	524288		497664	472392
k	g		h	i
	65536		62208	39049
	c		d	e
	256		243	
	A		b	
		8		
		f		

¶ Sint a b minimi numeri semitonij minoris. duco a in se et in b et b in se et exurgant c d e: eruntque c d
5 3 1 4 4 1 et d e duo semitonia minora cōiuncta. sit preterea f octonarius qui ex decimaoctaua huius est primus
5 2 4 2 8 8 ad b. quare per vndecimā tertij arithmetices et primus ad e. non habet igitur e octauam. duco ergo f
7 1 5 3 octonariū in c d e: et proueniant g h i: vt i scilicet oriatur ex f in e. certū est etiam inter g h et h i esse duo se-
2 1 1 9 mitonia minora. et quia e est octaua pars i addo e et i simul sitque eorum aggregatus k. dubiū nullum est
7 9 6 k ad i esse sesquioctauā: et k g esse proportionem qua sesquioctaua maior est g h et h i duobus semi-
5 2 7 toniis minoribus. sunt igitur k g numeri cōmatis. sed quod sint minimi ex decimaquinta tertij arithme-
2 6 9 tices notum est. Nam substracto vt eaipsa docet g ab k et eo quod relictū est substracto quoad potest
2 5 8 ab g. et sic deinceps tandē vt ad latus adiectū apparet: relinquitur vnitas. Et quēadmodum comma
1 1 duabus diesibus est prepositum: ita quoque quod facillimū est comma duabus diesibus subiungere aut
5 duabus interserere.
1

¶ Sesquiseptuagesimaquarta: commatis proportione transcenditur. 29

531441	531372 72	524288	7084 72
A	d 74	b	c 74

¶ Sint enī a b minimi numeri cōmatis per precedentē reperti. elicio per decimā huius septuagesimā quartā b que sit c. adiicio itaque b et c simul et coalescat aggregeturque numerus d. qui si ad b conferatur cōperitur sesquiseptuagesimusquartus. atqui idē d minor a esse deprehēditur. superat ergo per vndecimam huius ratio cōmatis septuagesimāquartam proportionem

¶ Cōmatis ratio: sesquiseptuagesimatertia proportione minor est. vnde fit vt cōmatis ratio inter septuagesimāquartā et septuagesimātertiā constituta reperiatur habitudinē 30

531470 2	531441	524288	7182 2
d 73	A	b	c 73

¶ Sint a b vt prius minimi numeri cōmatis. capio septuagesimātertiam partē b que sit c. iūgo b et c simul et aggregetur d. eritque d ad b sesquiseptuagesimustertius. et d maior a esse conspicitur. ergo cōmatis ratio sesquiseptuagesimatertia proportione minor est: quod erat monstrandum.
Correlarium vt alia notum est.

¶ Commatis ratio: in superpartiente ratione consistit. 31

¶ Non enī in superparticulari cōsistet quādoquidē due superparticulares proxime sesquiseptuagesima quarta et sesquiseptuagesimatertia: omnē prorsus mediā excludant superparticularē. et tanto minus in genere multiplici cōsistere valebit. vt que septuaginta duas superparticulares habeat se maiores. relinquitur ergo vt ea in superpartiēte genere consistere possit. est enī ea maioris et minoris habitudo.

¶ Rationes schismatis atque diaschismatis sunt ignote atque irrōnales. quo fit vt quarum minimi nūeri tetragonicū latus nō habeāt: medietatū rōnes ignote irrōnalesque sint oēs 32

256	243			
A	b	c	d	e
531441	524288			

¶ Eas rationes ignotas atque irrationales dicimus que nullo certo cōstitutoque numero designari valent vnquā: vt neque in geometricis diametri et coste quadrati proportio: quales schismatū diaschismatūque

ꝓportiones esse dicim⁹. Sint ergo pmo a b minimi numeri semitonij minoris: p decimãoctauã hui⁹ inuẽti: b enĩ vt illic quoq; mõstratũ est nascit ex nouenario in se ⁊ ternario in productũ nouenarij in se at nũerus q ex ductu nouenarij in se exurgebat: erat quadrat⁹ et ternarius nõ est quadrat⁹: ergo per decimãquartã sexti arithmetices b min⁹ semitonij mĩoris extremũ ex ductu qdẽ nõ q̃drati in q̃dratũ proueniẽs: nõ est numerus quadratus. si possibile est ergo vt diaschismatos ꝓportio in numeris sit nota: sint ergo per sextã quarti arithmetices duo diaschismata in minimis c d e cõiuncta. manifestũ enĩ est cum diaschisma sit semitonij mĩoris dimidiũ c d et d e simul esse semitoniũ minus. ⁊ c ad e esse semitonij minoris interuallũ. sed et cum ꝓportiones c d ⁊ d e sint cõtinuate in minimis ergo per quĩtam quarti arithmetices c e sunt in sua ꝓportione minimi. sunt ergo minimi in ꝓportione semitonij minoris. sed et tales positi sunt a ⁊ b: igitur c et e iidem erunt numeri cũ a ⁊ b scz c idem a et e idem b Preterea qꝛ que proportio c ad d ea est d ad e: ergo per primã sexti arithmetices c numerus est quadratus et c numerus quadratus: quare ⁊ b idem numero e etiam quadratus. at b demõstratus est nõ quadratus. erit itaq; idem numerus quadratus et nõ quadratus: quod est impossibile. nõ igitur diaschisma note ꝓportionis habebitur. et idem de proportione schismatos monstrabitur. sint enim a b subter designati minimi numeri cõmatis: qꝛ per vicesimãoctauam huius b minor proportionis commatis terminus fit ex ductu octonarij in quadratũ lateris ducẽtorum quĩquagintasex. et octonarius nõ est quadratus: ergo per decimãquartam sexti arithmetices b minor terminus cõmatis nõ est quadratus. nõ igitur simili vt prioris partis demõstratione a b certis designatisq; numeris potest equis proportionibus diduci. est igitur schismatos eius scz medietatis ratio ignota / atq; irrationalis. Correlarium ex modo demõstrationis notum est.

33 **Tonus: duobus semitoniis minoribus / et commate constat.**

Nam ratio sesquioctaua duobus semitoniis minoribus atq; vno cõmate constat. superat enĩ duas dieses duoq; semitonia minora vno commate: ac tonus in eadem ratione consistit. cõstat igitur tonus ex duobus semitoniis minoribus et commate.

34 **Tonus a duobus semitoniis minoribus: vno commate distat.**

Nam substracto a sesquioctaua ꝓportione vno cõmate relinquũtur duo semitonia minora: igitur et eodem cõmate a tono diducto due dieses ⁊ duo semitonia minora relinquũtur. distat ergo tonus a duobus semitoniis minoribus vno commate.

35 **Semitonium minus tribus commatibus maius est: minus vero quattuor. vnde manifestum est apotomen plura quattuor et pauciora quinq; continere cõmata.**

r	277531995223258301621530747994112
q	328128389443693511257285777623 1761
p	263600061952401802360312389697536
o	2178396179632950626746368
n	2155693963075557766310747
m	2067895430987964852731904
l	170986048351723552
k	166771816996665569
h	162312655271362556
g	134217728
f	129140163
e	127401984
d	524288
c	531441
b	243
a	256

Non ẽ greca curiositas calculi labore deterrita quo minus quot cõmata in diesi quot in apotome quot deniq; in tono sint: peruestigaret. quod nisi a prioribus tẽtatum cognouissem cũ id quoq; plus laboris q̃ (vt michi visum est) in musicis modulationib⁹ vsus / vtilitatisq; afferat: missuz fecissem. qui tamẽ id cognoscẽ desiderauerint hoc pacto deprehẽdent. Sint a b minimi numeri semitonij minoris et c d minimi cõmatis: per decimãseptimã ⁊ decimãoctauam huius reperti: duco b in c et d ⁊ ꝓueniãt e f et a in c ⁊ veniat g: per septimã secundi arithmetices f ad e est cõmatis habitudo / et per octauam eiusdem g ad e habitudo dieseos / semitoniiq; minoris. Deinde duco e in e ⁊ f in f et e in g ⁊ nascantur h k l: per sextam quarti arithmetices perq̃ facile cognosci potest k h continere duo commata. et per

septimam secundi eiusdē l ad h esse semitonium minus. Deinde duco d in h/et c in k/et d in l: & eo ordine veniant m n o: per eandem sextam quarti cognitu facillimū est n m continere tria commata. et per septimam secundi: o m cōtinere semitonium minus. at n numerus cognoscitur esse minor o. ergo o ad m semitonium minus tria vincit| exsuperatqꝫ commata. Deinde duco h in h et k in k et h in l. et suo ordine exsurgāt/orianturqꝫ p q r. manifestū est per idē qd prius q p cōtinere quattuor cōmata et r p cōtinere semitoniū minus. at numerus r minor est numero q. igitur quattuor cōmata amplius sunt semitonio minore. Correlariū autem hinc notū est ꝙ semitoniū maius solo cōmate superat semitonium minus. atqui semitoniū minus plura tribus & pauciora quattuor vt modo visum est continet cōmata. igitur vnico superadiecto cōmate semitoniū maius quod vocant apotomē: plura quattuor & pauciora quinqꝫ continere est necesse.

¶ Tonum: plura septem continere commata necesse est. 36

¶ Nam tonus ex semitonio minore & apotome coalescit atqꝫ cōstituitur. at semitoniū minus per penultimā tria continet cōmata & amplius: et per precedentē apotome quattuor et amplius tria autem et quattuor & amplius: septē sunt et āplius. igitur tonus plura ꝙ septem cōtinet commata.

¶ Secundi Elementorum Musicalium finis.

Esquitonus: est qui tonum ac semitonium minus continet. quem et trihemitoniū/trisemitoniūqꝫ: inferius dicemus.
Ditonus est qui duos cōplectitur tonos.
Tritonus vero qui tres.
Consonantie simplices sunt: diatessaron/diapente & diapason.
Composite vero: diapason diapente/bis diapason.
Diatessaron est cōsonantia: que ex intervalli sesquitertia ratione nascitur.
Diapente: que nascitur ex sesqualtera.
Diapason vero: que ex dupla.
Diapason diapente: est quā adinuicē iuncte constituūt diapason ac diapēte ꝯsonātie
Bis diapason: est quam coniūgunt due diapason consonantie.

¶ Nec altius ascēdunt Pythagorici ꝙ altius ascendētibus voces quodq pacto illis stridule vise sint & ꝙ vnicuiqꝫ ferme sue vocis modū/limitesqꝫ ad consonātiam bis diapason natura fecerit/qꝫ habita contēplatione musica adusqꝫ cōsonantiam bis diapason: reliquāvt habeatur ꝙ facillimā putauerunt vt qui ad ter atqꝫ quater diapason musicos modulos aptare voluerint. et hac quoqꝫ de causa musici ferme oēs in definiēda/determinādaqꝫ atqꝫ tradēda disciplina musica limites Pythagore nō transcendūt: putātes eius limitibus cōtenti: et priscam|veterēqꝫ autoritatē secuti sufficiēter determinasse. quod & nos in hoc opere tētabimus imitari.

¶ Sesquitonus inter sesquiquintam atqꝫ sesquisextam collocatus est. Vnde fit vt etsi sesquitonus iocunde/suauiterqꝫ auditū feriat: nondū tamen consonātia ponēdus sit. 1

291 3	288	283 3	256	243	48 3	40 3
d 5	A	e 6	b	c	f 5	g 6

¶ Sit ergo a ducenta octuagintaocto: b vero ducenta quīquagintasex: et c ducenta quadragitatria. per decimāoctauam secūdi huius manifestū est a ad b esse tonū| & b ad c esse semitoniū minus. quare a ad c per diffinitionē erit sesquitonus. quē dico in ꝓportione minore consistere ꝙ sit sesquiquinta|et maiore sesquisexta. Nam capio per decimam secundi huius quintā partem c et veniet numerus 48 et tres quinte qui sit f. addo igitur f ad c et aggregatus fiat d: qui maior inuenitur ꝙ a. igitur per vndecimam secūdi huius d ad c ꝓportio maior est ꝙ a ad c. At vero d ad c sesquiquinta est. est itaqꝫ sesquitonus in ꝓportione minore cōstitutus ꝙ sit sesquiquīta proportio. Capio deniqꝫ per eandē decimam secundi sextā partem c et veniet michi numerus 40 et semis qui sit g. aggregatus igitur g ad numerū c restituat numerū e. certum est numerū e minorē esse ꝙ a. quare vt prius a ad c sesquitonus maior est ꝙ e ad c: qui in sexquisexta ꝓportione cōstituitur. quod est propositū. Correlariū enim cognoscitur. & primū ꝙ sesquitonus suauiter feriat auditum: cuiuslibet musicis modulationibus intēti fidem facit sensus. ꝙ vero nōdum cōsonantia sit: iccirco euenit ꝙ sesquitonus in superparticulari ratione nō consistit: quādoquidem inter sesquiquintā & sesquisextā proximas supparticulares nulla cadit interstes| mediaqꝫ superparticularis habitudo. neqꝫ quidē est in multiplici genere: quoniā per vndecimā primi huius dupla ꝓportio que multipliciū minima est: ex sesqualtera|et sesquitertia ꝓportione maximis quidē superparticularibus: exurgit atqꝫ nascitur. cōsonantia autem omnis per diffinitionē in superparticulari aut multiplici ratione consistit. est ergo totum propositum notum.

2 ¶ Itidem ditonus inter ſeſquitertiam atqꝫ ſeſquiquartam medius: minime muſicam complet atqꝫ perficit harmoniam.

85 1/	81	80	72	64	21 1	16
D 3	A	E	B	C	F 3	G

¶ Harmoniã et conſonãtiam idem dicimus et huius vt precedẽtis procedit demonſtratio. Sint ergo a b c duo toni in minimis conſtituti. vt 81|72|64. dico ditonum a ad c conſiſtere in proportione mio:e ſeſquitertia: et maiore ſeſquiquarta ⁊ muſicam cõſonantiam haud quaꝗ̃ perficere. Capio enĩ tertiam partem c per decimã ſecundi huius vt ſepe factum eſt. et venit vnum ⁊ viginti cum triente vnius: qui numerus ſit f. addo itaqꝫ f 21 et trientẽ ad numerũ c 64. et aggregatus eſt 85 cum tertia parte vnius: qui idem ſit d. manifeſtũ eſt d ad c eſſe ſeſquitertiũ. at d maior eſt a: continet enĩ a dumtaxat vnum et octuaginta: d vero octuaginta quinqꝫ ⁊ amplius. eſt ergo ſeſquitertia proportio ditono maior. Et rurſum capio quartam partem c que ſit g: quam addo ad c et ſurgat e: qui erit ad c ſeſquiquartus. at a maior eſt e. igitur per vndecimã ſecundi huius: ditonus ſeſquiquartũ tranſcendit. et cum inter ſeſquitertium ⁊ ſeſquiquartũ nullus cadat ſuperparticularis medius/ neqꝫ multiplex: erit ergo ditonus in proportione ſuperpartiẽti collocatus. quare muſicam conſonãtiam (etſi in muſicis modulationibus ſit euphonus ſuauiterqꝫ auditum feriens) nõdum tamen perficit.

3 ¶ Ditoni interuallum: ſola ſeſquitonum ſuperat apotome.

¶ Nam ſeſquitonus vnum tonum cõtinet integrum et ſecundi toni cõtinet ſemitoniũ minus. ſed cũ tonus ex ſemitonio minore ⁊ apotome conſtet cuadatqꝫ coalitus. ergo ſeſquitono ad ſecũdi toni completionẽ ſola deeſt apotome. at ditonus ſolos duos incolumes/ integroſqꝫ poſſidet tonos. ergo ditoni interuallum ſola apotome/ ſoloqꝫ ſemitonio maiore: ſeſquitoni ſuperat interuallũ. qđ eſt propoſitũ.

4 ¶ Diateſſaron conſonantiam in data chorda collocare.

4	3			
A	c	d	e	b

¶ Cum enim epitrita/ ſeſquitertiaqꝫ proportio: cõſonantiam diateſſaron creet: iccirco data quacũqꝫ chorda vt a b eam in quattuor equas portiones diuido. vt a c: c d: d e: ⁊ e b. et dico a b ad c b conſonare diateſſaron. Nam a b continet c b et inſuper a c que tertie parti c b equatur. eſt ergo interuallum a b ſeſquitertiũ ad c b. ergo a b ad c b per diffinitionẽ conſonat diateſſaron: et cõſonantia diateſſaron in chorda a b data: collocata. quod eſt propoſitum.

5 ¶ Tritonus: conſonantiam diateſſaron tranſcendit.

¶ Nam per decimãoctauam primi tres ſeſquioctaue proportiones amplius ſunt ſeſquitertio interuallo. atqui in tribus ſeſquioctauis: per diffinitionẽ tres conſiſtunt toni. igitur in tribus ſeſqoctauis conſiſtit tritonus. ⁊ in epitrito/ ſeſquitertioqꝫ interuallo conſiſtit cõſonantia diateſſaron. igitur cõſonantiam diateſſaron tranſcendit vt proponebatur: tritonus.

6 ¶ Conſonantiã diateſſaron: duobus tonis atqꝫ ſemitonio minore conſtare neceſſe eſt. Unde facile comparatum eſt ſeſquitonum tono/ et ditonum ſemitonio minore citra diateſſaron concẽtum deficere. Compertum item eſt conſonãtiam diateſſaron quinqꝫ dieſes et duo commata continere.

Diateſſarum conſonantia				
A	c			b

¶ Sit a b et c b conſonantia diateſſaron. dico eam duobus tonis ⁊ ſemitonio minore conſtare. Nam cum a b ⁊ c b ſit diateſſaron: erit a b et c b per cõuerſionem diffinitionis ſeſquitertius. at cum ſemitonium minus per diffinitionẽ ſit id quo ſeſquitertia duobus tonis maior eſt. continet ergo a b ⁊ c b ſemitonium minus et duos tonos. igitur conſonantia diateſſaron duobus tonis/ ſemitonioqꝫ minore conſtat. Et primũ correlariũ hinc facile cognoſcitur. Cum enim ſeſquitonus ſolũ tonum ⁊ ſemitoniũ minus contineat: deeſt igitur ipſi ad cõſonantiam diateſſaron complẽdam per preſentẽ vnus tonus. et cum ditonus ſolum duos cõplectatur tonos: deerit ipſi ad eandem complẽdam ſemitoniũ minus. Secũdum vero hinc haud difficile perſpicitur cognitũ. Nam cum tonus per triceſimãtertiam ſecũdi duas dieſes ⁊ vnum comma cõtineat: duo toni quattuor dieſes ⁊ duo cõtinebunt cõmata. at per preſentem diateſſaron conſonantia duobus tonis vnam dieſim ſuperaddit. continet igitur conſonantia diateſſaron quinqꝫ dieſes atqꝫ duo commata. quod eſt totum propoſitum.

¶Quinq; toni:duas diatessaron consonantias vno commate vincunt/ euaduntq; 7
maiores.

¶Putauit Aristoxenus musicus diatessaron cõsonantiam duobus tonis et integro semitonio constare. ꝛ proinde duas diatessaron cõsonantias:quinq; tonos iplere.cuius error ex tertio musices diui Seuerini boecij et ex hac ꝛprecedẽte facile cõuincitur. Nam per precedẽtem cõsonantia diatessaron nõ ex duobus tonis et semitonio integro constat: verũ ex duobus tonis ꝛ semitonio minore. quod ex vicesimaprima secũdi inter sesquioctauã decimam et sesquinonã decimã proportionẽ collocatur.integrũm autẽ semitoniũ per decimãquartam eiusdem:inter sesquisextã decimã ꝛ sesquiseptimã decimã collocaretur.diminutius est ergo semitoniũ minus integro semitonio. Quia ergo vt per precedẽtem dictũ est:cõsonantia diatessaron duos tonos et semitoniũ minus cõtinet:due igitur diatessaron cõsonantie cõtinebunt tonos quattuor/et duo semitonia minora. et qꝛ per tricesimãtertiam secũdi tonus cõtinet duo semitonia minora et vnum cõma.ergo due diatessaron cõsonantie quinq; tonos vno commate minus:cõtinent. quinq; igitur toni: duas diatessaron cõsonantias vno cõmate vincũt atq; euadunt maiores.quod intẽdebatur.

¶Consonantiã diapente:in assignato neruo constituere. 8

3	2		Consonãtia diapẽte.
A	c	d	b

¶Sit assignatus numerus a b supra quẽ iussum sit cõsonantiã diapente collocari:diuido a b in tres adinuicẽ equas partes per notas a c d b:ita vt a b tres cõtineat et c b earum contineat duas.erit per diffinitionẽ a b ad c b hemioliũ/sesqualterũq; interuallũ.sed cum cõsonãtia diapẽte:per diffinitionẽ ex ea interualli ratione nascať.ergo a b ad c b cõsonabit diapẽte. eritq; a b ad c b in data chorda assignatoue neruo cõsonantia diapẽte collocata.

¶Tres toni:consonantia diapente minus sunt.ꝛ quattuor eandem consonantiam 9
transcendunt.

¶Etsi ex quinta huius satis cognoscať tritonũ nõ posse efficere diapẽte cõsonantiã: hec etiã ostẽdit tritonum diapẽte consonãtia esse minorem. Nam per decimãoctauam primi huius tres sesquioctaui minus sunt sesqualtero interuallo. et per decimãnonam eiusdẽ quattuor sesquioctaui sesqualterum superãt interuallũ.consonãtia aũt diapẽte in sesqualtero sita est.ergo tres toni in tribus sesquioctauis constituti:minus sunt cõsonantia diapente. ꝛ quattuor toni in quattuor ꝯsistentes sesquioctauis eãdem consonãtiam magnitudine transcẽdunt:quod est totum propositum.

¶Consonantia diapente:tribus tonis/semitonioq; minore constat. Quo fit vt a dia 10
pente subducto tono:diatessaron consonantia relinquatur.subducta autẽ diatessaron
consonantia : relinquatur et tonus.

¶Nam per decimãquintam primi si a sesqualtero interuallo sesquitertiũ demptũ fuerit : relinqueť sesquioctauum. sed vt in demõstratione sexte huius visum est: sesquitertiũ continet duos tonos cum semitonio minore.ergo cõsonantia diapente sesquioctauũ hoc est tonum vltra duos tonos cum semitonio minore continens : tribus tonis et semitonio minore constabit quemadmodum propositum est. Correlariũ cognoscitur. Nam diapente per presentem continet tres tonos cum semitonio minore. at substracto tono residui sunt duo toni:atq; semitoniũ minus. et per sextam huius duo toni cũ semitonio minore constituunt cõsonantiam diatessaron.substracto igitur tono a cõsonantia diapente:relinquitur diatessaron.sed et cum diapẽte constet ex tribus tonis cum semitonio minore:substracta ergo diatessaron cõsonantia que duobus tonis et semitonio minore completur : relinqueť queadmodum secunda pars correlarij proponit:tonus. quod est totum correlarium.

¶Diapente consonantia: minus octo semitoniis minoribus continet. 11

¶Nam cum tonus vnus duo semitonia minora et vnum cõma cõtineat:tres toni ꝛ vnum semitoniũ minus septem semitonia minora ꝛ tria commata cõtinebunt.ac tria commata per tricesimãquintam secundi huius semitonio minore sunt contractiora.ergo diapente que per precedẽtem tribus tonis et semitonio minore constat:minus octo semitoniis minoribus cõtinebit.sed queadmodum facile monstratum est diapente cõsonantiam nõdum octauum attingere semitoniũ minus/octauãq; diesim: ita quoq; facile monstratu esset:eandem consonãtiam nõdum septimam attingere apotomẽ.

¶Diapente consonantia : ditono/sesquitonoq; coniungitur. 12

¶Nam diapente per penultimã tribus tonis et semitonio minore constat. et ditonus ꝛ sesquitonus simul tres tonos et semitoniũ minus efficiunt.igitur ditonus atq; sesquitonus pariter copulati cõsonantiam diapente iungunt:quod intenditur.

¶Consonantiarũ diapente ꝛ diatessaron:tonus differentia est. quo fit vt diatessaron 13
consonantia adiuncto tono: consonantiam diapente restituat.

¶Differẽtia hic vocat̃ ea ꝓportio qua maior superat minorẽ. Nam p correlariũ decime huius sub ducto tono a cõsonantia diapente relinquit̃ consonãtia diatessaron. solo igitur tono consonantia dia pente cõsonantia diatessaron est maior. est igitur per diffinitionẽ: harum cõsonantiarũ tonus drĩa. ⁊ correlariũ statim ex propositione notum est.

14 ¶Bis diatessaron: sesquitono consonantiam diapente transcendit.

¶Diatessaron enĩ p sextã huius duos tonos atqꝫ semitoniũ minus cõtinet. ergo bis diatessarõ quat tuor tonos et duo semitonia minora ꝑtinebit. atqui a quattuor tonis ⁊ duobus semitoniis minoribꝰ dempto sesquitono: relinquũtur tres toni et semitoniũ minus. Atuero per decimã huius cõsonantia diapente totidẽ tonos cũ semitonio minore cõplectitur. ergo bis diatessaron: sesquitono consonantiã diapente transgreditur transcẽditqꝫ quẽadmodum proponitur.

15 ¶Cõsonantie diatessaron / ac diapente: in maximis supparticularibus sunt collocate

¶Nam ex diffinitione cõsonantia diatessaron in epittrita sesquitertiaqꝫ ꝓportione collocatur. et dia pente in hemiolia atqꝫ sesquitertia. at nulle supparticulares sesqualtera ⁊ sesquitertia sunt maiores nam a secũda ⁊ tertia parte q̃ maxime sunt sese cõsequẽtes partes: denominãtur. igitur he cõsonantie ex maximarum superparticulariũ originibus ducte: in maximis superparticularibus sunt collocat quod est propositum.

16 ¶Bis diatessaron / aut bis diapente: nullam consonantiam cõponere potest.

¶Hec proponit duas diatessaron cõsonantias aut duas diapente consonantias: nullã conflare posse cõsonantiã. Nam et diatessaron ⁊ diapẽte nõ in multiplicibus sed supparticularibus sunt constitute et per primã petitionẽ que ĩterualli ad interuallũ proportio est: ea quoqꝫ est et soni ad sonũ. at p sextã primi duo similia interualla nõ multiplicia: neqꝫ multiplex neqꝫ supparticulare creant interuallum. quare neqꝫ illorũ soni in multiplici: neqꝫ in supparticulari gñe existunt. omnis aũt consonãtia aut in supparticulari aut in multiplici rõne collocãda est. sic enĩ consonantie noĩe hoc in loco Pythagoricã sequẽtes autoritatẽ: suscepimus vtẽdum. ergo due cõsonantie diatessaron aut due diapente: nullam efficiẽt cõsonantiã. et nõ modo id verũ sit: sed ⁊ quotquot ꝯsonantie diatessarõ in ĩmensum copulẽtur et quotquot diapẽte: nullã vnqꝫ consonãtiam ex quinta primi huius efficere valebũt.

17 ¶Adiuncto ad cõsonantiam diapente tono: nulla parabitur consonantia. item neqꝫ ad diatessaron trisemitonio.

G	11			Numerorũ drĩa	T	3384			Numerorũ R S drĩa
E	27	F	16	Sexta maior	R	9216	S	5832	Sexta minor
C	9	D	8	Tonus	P	2304	Q	1944	Sesquitonus
A	3	B	2	Diapente	N	4	O	3	Diatessaron
					L	256	M	243	Semitomiũ minus
					H	9	K	8	Tonus

¶Et si hic sonorũ congressus nõdum cõsonantia sit: euphonũ tamen musici reputant melo|modulaminibusqꝫ aptum: sextãqꝫ ꝙ sex impleatur vocibꝰ nostri nunc nũcupant. et quattuor tonis atqꝫ vna diesi hoc est semitonio minore constat. qui ꝙ nõdum cõsonãtia sit patet. Accipio enĩ a ⁊ b ternariũ et bina rium: minimos scꝫ numeros cõsonantie diapente. ⁊ c d nouenariũ atqꝫ octonariũ minimos numeros toni. et duco c in a ⁊ veniat d septem supra viginti. et d in b ⁊ veniat e decem et sex. per tertiam quinti Arithmetices d ad e cõtinet sesqualterũ ⁊ sesquioctauũ: quare d ad e cõtinet diapente atqꝫ adiunctũ tonum. at manifestũ est d ad e 27 scilicet ad 16 nõ esse multiplex. nam septem ⁊ viginti nõ continẽt bis aut tertio aut deinceps sedecim. neqꝫ d superparticularis est ad e. nam drĩa numeri d ad e est vndecim qui numerus summe 16 pars nulla est. transcẽdit enĩ vndenarius sedenariũ dimidiũ. igitur adiũctus ad consonãtiam diapente tonus: nullam parit cõsonantiã. et simili argumento adiecto ad cõsonantiã diatessaron sesquitono: nulla fit cõsonantia vt ex secũda figuratione perfacile patere potest. fit tamẽ euphona vocum congressio: quã item sextam nũcupant: sed que a prima contractior tota distet apotome. est ergo hec minor | illa vero maior. constat enim prima vt dictum iam est: quattuor tonis et vna diesi / secunda vero tribus tonis ⁊ duabus diesibus. Primã sonat Parhypate hypaton ad mesen: secũdam vero que contractior est: sonat hypate hypaton ad Lichanon meson. que autem hypate | que parhypate: qui lichani | et que mese dicãtur: sequẽs liber declarabit.

18 ¶Quo pacto diapason consonantia: in chorda sit adiungenda.

A	C	B	Cõsonantia diapason

¶Hec ꝯsonãtiarum vt in libro probleumatũ testatus est Aristoteles: elegãtissima | pulcherrimaqꝫ est Chordam ergo a b seco per medium per notã c. et quia a b ad c b est dupla interualli habitudo. ergo per diffinitionem a b ad c b consonat diapason.

¶Consonantia diapason: in sex tonis minime consistit. sed quinqꝫ amplior: sex vero tonis: consonat contractior. 19

¶Nam per vicesimā primi quinqꝫ cōiuncti sesquioctaui: minus duplici interuallo conitingunt. et per vicesimāprimam eiusdē sex coniuncti maiorēs vno duplici interuallo euadunt. ergo quinqꝫ toni minores sunt diapason cōsonantia/ et sex eadem sunt ampliores. consonat ergo diapason quinqꝫ tonis amplior: sed et sex eadem modulabitur inferior.

¶Diapason: ex diatessaron et diapente consonantiis coniungitur. 20

¶Nam per decimāquartam huius diatessaron et diapente in maximis supparticularibus sunt collocate. at per vndecimā primi duplex interuallū ex duobus maximis supparticularibus cōiungitur. et duplex interuallū: consonātie diapason interuallū existit. igitur consonantiā diapason: diatessarō et diapente consonantie simul coniungunt. quod est propositum.

¶Cōsonantia diapason: quinqꝫ tonis et duobus semitoniis minoribus que tonū minime cōplent: perficitur. Unde quoqꝫ manifestū esse potest: cōsonantiam diapason solo a sex tonis commate distare. 21

¶Per precedētem enī diatessaron et diapente consonātiam diapason iungunt. diatessaron aūt per sextā huius duobus tonis et semitonio minore constare mōstrata est: et diapente ꝑ nonā tribus tonis semitonioqꝫ minore. at duo toni et semitoniū minus ꝛ tres toni et itidem semitoniū minus simul conflati: quinqꝫ efficiūtur toni atqꝫ duo semitonia minora. atqui duo semitonia minora tonum non perficiunt: verū ab eo deficiunt cōmate. igitur consonātia diapason quinqꝫ tonis et duobus semitoniis minoribus: que tonū minime īplent queādmodū iam propositū est perficiť. ¶Correlariū ex demonstrationis calce notū esse potest. Ex quo liquet ꝑfacile esse in neruo musicū cōma peruestigare. Nam in eo a principio constitutis/ cōtinuatisqꝫ sex tonis et ab eodē nerui initio ad mediā chorde notam intensa diapason cōsonantia quod inter mediā nerui notam et vltimū sex tonorū signum cōtinetur: ex precedentis correlario erit cōmatis interstitiū.

¶Dempta ex diapason cōsonantia diapente: relinqtur diatessaron. et ex eadē dēpta cōsonantia diatessaron: relinquitur diapente. demptis autem ex ea diapente et tono relinquitur sesquitonus. 22

¶Prima pars et secunda statim per penultimā cognite sunt. Item ꝛ per ꝑcedentē. Nam per precedentē diapason quinqꝫ tonis ꝛ duobus semitoniis minoribꝰ constat: a quibus si tres tonos et vnū semitoniū minus tollas que per decimā huius diapente cōsonantiā continēt: relinquūtur duo toni ꝛ semitoniū minus: q̄ per sextā huius diatessaron cōsonantiā efficiunt. dēpta igitur ex diapason consonātia diapente: relinquiť diatessaron: quod est primū. Secundū eadē facilitate declaratur. Nam ex quinqꝫ tonis et duobus semitoniis minoribꝰ si duos tonos ꝛ semitoniū minus tollas: relinquūtur tres toni et semitoniū minus. Tertiū consimiliter. demptis enī a consonātia diapason hoc est a quinqꝫ tonis et duobus semitoniis minoribus demptis inquā quattuor tonis et semitonio miore reliquus est tonus vnus ꝛ semitoniū minus. Et quot dieses quot apotomas quot deniqꝫ cōmata contineat diapason: deprehēsionis sunt facillime: in nulla tamen equaliter: tota ipsa diuidua est quādoquidem diapason in multiplici ratione consistit que omnino in quotlibet equas proportiones que multiplices nō sint per sexagesimam noni arithmetices diuidi non potest.

¶Nulla simplex cōsonantia: in duo equalia: certo/ cōstitutoqꝫ nūero diuisibilis est. 23

¶Simplices consonātias vocamus diatessaron/ diapente/ diapason. de diatessaron autē ꝛ diapente constat q̄ ex supparticularibus interuallis surgūt: que per quintā primi nullo/ pacto hunc in modum dirimi possunt. de diapason vero cōsonantia idē subit iudiciū. Nam quoniā minimi eius numeri sunt duo et vnum: ꝛ duo quadratus nō est: igitur per correlariū tricesimesecūde secundi huius cōsonantia diapason q̄ consistit in ꝓportione duorū ad vnum minime in duo equalia partieť. et eodē quoqꝫ iure neqꝫ eadē consonātia in plura duobus dimetieť/ dirimeturqꝫ equalia. Et profecto velle hoc pacto consonantiā diapason in plura equa diducere. est in geometricis diametrū coste quadrati velle cōmensurare. sed id vltimū musicum nō est

Diapason ac diatessaron: consonantiam non esse. 24

E 8			f 3		g 2	
2	1	4		3		
A	b	c		d		

¶Etsi in diapason ac diatessaron sit duarū vocum dulcis/ amenaqꝫ cōgressio vt queādmodum cum pulsatur sesquitonus: nō iccirco tamē euenit diapason ac diatessaron ꝯsonantiā dici mereri. Tametsi Ptholomeo secus q̄ Pithagoricis hac in re visum sit: quod monstratu facillimū est. Sint enī a et b binarius ꝛ vnitas: minimi scꝫ numeri consonātie diapason et c d quattuor ꝛ tria minimi idētidem cōsonantie diatessaron duco c in a et veniet octonarius qui sit e: ꝛ d in b et veniet ternarius: qui sit f. per tertiam quinti Arithmetices e ad f continet duplā et sesquitertiā: quare diapason ac diatessarō.

sed e octonarius non est multiplex ad f ternarium/ neq́ supparticularis ꝙ eũ bis cõtineat et insuper binariũ qui ternarij nõ pars vlla est sed partes. est enĩ octonarius ad ternariũ duplex subbipartiẽs. Non est igitur diapason ac diatessaron ꝯsonãtia.oĩs enĩ consonãtia aut in supparticulari/ aut in multiplici genere ex diffinitione cõsistit.Et in hoc facile cognosci potest ex nouo ꝓbleumatũ libro ꝙ̃ Pythagoricis cõsensit Aristoteles:cũ inquirit cur non bis diapente/ aut bis diatessaron reddi ꝯsonãtia potest:vt bis diapason coaptari solet.Hoc inquit ideo est ꝙ diapẽte consonãtia posita in proportione sesqualtera est diatessaron ꝟo in sesquitertia.ꝙ si duo sesqualteri aut sesquitertij numeri ordine disponãtur:extremi nullam inuicem proportiõem habebũt.neq́ enĩ supparticulares neq́ multiplices esse poterũt.at diapason ꝯcinẽtia qm̃ in duplari proportione cõsistit:hac gemĩata:quadruplam inuicem extremi tenebũt/habebũtq́ ꝓportiõem.Vides ergo quo pacto Aristoteles consonãtiarũ ꝓportiones solas supparticulares aut multiplices efficit:suppartiẽtes q̃s prorsus nulle sint repudians. Et re ꝟa Ptholomei cũ Pythagoricis magis in noĩe ꝙ̃ in reipsa dissentio putanda est.sed de his hactenus.

25 Diapason ac diapente:in triplici consistit ratione. estq́ diapason ac diapente consonantia vna.

Qui enim diapason ac diapente in tripla rõne cõsistat:hoc ideo est ꝙ ex duodecima primi ex duplici atq́ sesqualtero interuallo triplex nascit̃ interuallũ.duplex aũt ꝛ sesqualtex sunt ꝯsonãtiarũ diapason et diapente interualla.igitur iuncte ꝯsonãtie diapason ac diapente in tripla rõne cõsistunt.sed cũ sensu iam satis sit exploratũ hũc cõcentũ modulate/ suauiterq́ ad auditũ ꝑuenire: ergo per diffinitiõem is concẽtus consonãtia est.quod est totum propositum.

26 Diapason diapente ac tonus:melos citra consonantiam eliciunt.

27			8
e			f
3	1	9	8
a	b	c	d

Melos hic vocamus suauem auribus acceptam voculationem/ amenũq́ plurĩũ vocum cõgressum. sed ꝙ diapason diapente ꝛ tonus simul iuncta melos constituũt:statim notum est. Nam hec sonorum voculatio suauiter vt experiẽtia discitur auribus accidit.sed ꝙ consonãtiam nullã parẽt:ostẽdit̃. qm̃ enĩ per precedẽtem diapason ac diapente in tripla proportiõe consistit.sint ergo a b tria ꝛ vnũ minimi consonãtie diapason ac diapente numeri/ et c d nouem ꝛ octo minimi numeri toni.duco c in a ꝛ d in b et veniãt e f 27 scꝫ et 8 inter que est diapason diapente atq́ tonus.sed e ad f neq́ supparticularis neq́ multiplex:quinimo e ꝯtinet f ter et tres eius octauas:estq́ e ad f triplus suptripartiẽs octauas. non cõcinit igitur e f aliqua consonãtia.quod totum est propositum.

27 Bis diapason consonantia:in quadruplari constituta reperitur habitudine.

Qui enĩ bis diapason in quadruplari cõsistat:statim est manifestum. Nã per decimãtertiã ꝑmi duo duplicia interualla quadruplex iungunt interuallũ.diapason aũt in duplari cõsistit. igit̃ bis diapason quadruplarem iungit habitudinem:que est multiplex.et cũ bis diapason ad auditũ suauis/ emodulataq́ ꝑueniat vt id quoq́ sensu satis perceptum est.ꝗ ꝑ diffinitiõem erit ꝯsonãtia. qđ erat mõstrandũ.

Pythagorici ꝛ priores musici oẽs:ꝯcentuũ modũ in terminis quadruple atq́ in finibus ꝯsonãtie bis diapason perstrinxerũt:non temere lõgius progressi aut ꝙ inter illos terminos vnicuiq́ factus a natura reperitur sue vocis modus/ aut ꝙ stridulꝰ ille canor illis vt iam quoq́ dictũ est visus est ꝙ veseriam iam relinquũt mediocritatem/ aut ꝙ hactenus contẽplatio satis ipĩs esse visa est ad musicam institutiõem.posteritas aũt ad ter diapason vel ꝛ amplius adauxit ad terĩos vsq́ octuple lõgius euagata:de quibus necessaria speculatio non incũbere videtur:sed pauca paucis strinxisse satis erit. Nã qui modulatiõem supra bis diapason cognoscere desiderabũt: facili demõstratiõe vt precedẽtia ꝑcipient.bis enĩ diapason ac diatessaron in ꝓportiõe quicupla sesquitertia cõsistit.et proinde plane cõsonãtia putãda nõ est.bis diapason ac diapente in ꝓportiõe sescupla et ideo consonãtijs ãnumerata. ter vero diapason in proportione octupla.

28 Omnes consonantias:in data chorda suo ordine subiũgere:et eas sensu perceptibiliter experiri.

A c| d| e| f| g| b|

Sit a b data chorda in qua ꝓpositũ sit ꝯsonãtias diatessaron/ diapẽte/ diapason/ diapason ac diapente/ et bis diapason situare.colloco in signo a brachiũ circini imobile et ad totius chorde quartam partem extendo circini brachiũ mobile:et in termĩo eius pono notam c.deinde extendo idem brachiũ ad eiusdem chorde partem tertiã:et in terĩo pono d.mox ad totius chorde partẽ mediam quã designo nota e.deinde eodẽ brachio capio totius chorde bissen:hoc est duas tertias:et in terĩo bisses pono f. mox extẽdo circinũ ad chorde dodrãtem:hoc est ad tres eius completas quartas:in cuius fine affigo notam g.tunc sic a b ꝛ c b per quartã huius ꝯsonat diatessaron.a b ꝛ d b per octauã diapente a b ꝛ e b per decimãoctauam diapason a b ꝛ f b per vicesimãquintam diapason ac diapente.postremo ꝟo a b ꝛ g b per precedẽtem bis diapason. Suppone igit̃ musicale hemispheriũ sensim singulis chorde notis et sonos ad totius chorde sonum diligẽter attẽde.et suo ordine ꝓpositas ꝯcinẽtias annotabis. quod prõptius experiri valebis:si chorde a b chordam equisonam/ vnisonãq́ etiã collocaueris:cuius sonũ cum singulis sectionum a b ꝑcussionibus non segniter attenderis.

¶ Consonantiarũ hoc pacto digestarum: finis consonantie diatessaron: ad finem dia- 29
pente sonat tonum/ ad finem diapason: consonat diapente. ad finem diapason ac dia-
pente: incõsonus. ad finem vero bis diapason: consonat diapente ac diapason.

A	c	d	e	f	g	b

¶ Sint a/c/d/e/f/g/b modo qui dictus est digeste consonãtie: dico c b finem ꝯsonãtie diatessaron ad d b sonare tonum/ ad e b esse diapente/ ad f b incõsonũ esse/ ad g b v͛o cõsonare diapente ac diapason. Nam per precedentem a b ⁊ c b est diatessaron et a b et d b diapente. dẽpta ergo a b ⁊ c b diatessaron cõsonãtia ab c b ⁊ d b diapente: per correlariũ decime huius relinquit᷑ tonus. qđ aũt relinquit᷑ est c b ⁊ d b: igitur c b ad d b sonat tonum. et qm̃ per precedentẽ a b ⁊ e b ꝯcinit/ modulaturq; diapason sub- stracta: igit᷑ a b et c b diatessaron ab a b et e b ꝑ vicesimã scđam huius qđ relinquit᷑ est diapente. atqui quod relinquit᷑ est c b et e b: igitur c b ad e b ꝯsonat diapente. et q2 per precedentem a b ⁊ f b consonat diapason ac diapẽte: subducta igitur a b ⁊ e b ꝯsonãtia diapason: qđ relinq̃tur est diapente. quod aũt relinquit᷑ est e b ⁊ f b. igitur e b ⁊ f b consonantia est diapẽte. sed ꝑ modo monstratũ c b ⁊ e b etiã dia- pente est: igitur c b ⁊ f b est bis diapente. at ꝑ decimãquartã huius bis diapente ꝯsonãtia componi nõ potest: igit᷑ c b ad f b incõsonus est. postremo qm̃ vt ex p̃cedẽti notũ est a b ⁊ g b ꝯsonat bis diapason. dẽpta igit᷑ a b ⁊ e b diapason ꝯsonãtia relinq̃tur e b et g b ẽẽ diapason. atqui c b ⁊ e b per scđam ꝑtem huius mõstrata est esse diapente. igitur adiũcta c b et e b consonãtia diapente ad e b ⁊ g b cõstituitur diapente ac diapason. cõsonat ergo c b ⁊ g b diapente ac diapason. quod est totum propositum.

¶ Sic positis consonãtijs: finis diapente ad finem diapason modulatur diatessaron/ 30
et ad finem diapason ac diapente: modulatur diapason. ad finem vero bis diapason
euphonus est: sed qui nondum consonantia est.

A	c	d	e	f	g	b

¶ Esto precedẽtiũ hypothesis: dico d b finem diapente ad e b consonare diatessaron. ad f b diapason. et ad g b sonare diatessaron ac diapason. Nam per penultimã a b et e b cõsonãtia est diapason. et a b et d b diapente. substracta igitur a b ⁊ d b diapente: ab a b ⁊ e b ꝯsonãtia diapason: per vicesimã scđaꝫ huius relinq̃tur diatessaron. qđ aũt relinq̃tur est d b et e b: igit᷑ d b ad e b ꝯsonat diatessaron. et q2 in precedẽti monstratũ est e b ⁊ f b eẽ diapente: et nũc d b et e b esse diatessaron: ergo per vicesimã huius d b et f b ex illis duabus cõflata/ coalitaq; cõsonãtia modulabit᷑ diapason. Rursum cũ e b ⁊ g b in p̃ce denti mõstrata sit diapason: et e b et f b diapẽte: ergo per vicesimã scđam hui9 f b ⁊ g b est diatessaron. et d b et f b nunc mõstrata est diapason. igitur d b ⁊ g b est diapason ac diatessaron: que cũ modulatio sit euphona ⁊ eã monstrauerit vicesimaquarta huius non esse ꝯsonãtiã totũ liquet mõstratũ ꝓpositũ. et ex hac quoq; pariter cognitũ est finem diapason: ad finem diapason ac diapente modulari diapẽte vt e b ad f b et ad finem bis diapason cõsonare diapason.

¶ Consonãtiaꝝ sic collocataꝝ: totius chorde atq; cuiusq; sectiõis nũeros designare. 31

24	18	16	12	8	6	
a	c	d	e	f	g	b

¶ Duco duo/ tria/ et quattuor in seinuicem: et numerũ inde surgentem atq; ꝓductũ qui hẽbit scđam tertiam ⁊ quartã: pono totius linee numerum quẽ iccirco voco numerum a b ab quo demo quartam partem et reliquus sit c b: et erit p̃mus numerus ad ip̃m sesquitertius. quare diatessaron. et ab eodeꝫ numero demo partem tertiam ⁊ residuus sit d b: eritq; a b ad d b sesqualter: quare cõsonãtia diapẽte. et iteꝝ ab a b diduco ꝑtem mediã et residuus sit e b: eritq; a b ad e b duplus. q̃circa diapason ꝯsonãtia inter eos exurget. et nũeri a b sumo solã tertiam q̃ sit f b: erit ergo a b ad f b h̃itudo tripla. cõtinebũt igit᷑ a b et f b diapason ac diapẽte. Rursum numeri a b sola quarta sit g b: erit a b ad g b quadruplus. quare a b et g b sunt numeri bis diapason. sunt itaq; totius chorde a b ⁊ cuiusq; sectionis eius s̃m as- signatas consonãtias designati numeri. quod erat demonstrandum.

¶ Quotcunq; harmonicas medietates assignare: inter quaꝝ terminos eorũq; diffe- 32
rentias omnes musice reperiantur consonantie.

Harmonice	12	8	6		Epitritus	b c	Diatessaron
Medietates	6	4	3		Hemiolus	a b	Diapente
	a	b	c		Duplaris	a c	Diapason
Differentie		2	1		Triplaris	c e	Diapason diapente
		d	e		Quadruplaris	b e	Bis diapason.

¶ Harmonica medietas in Arithmeticis diffinita est qñ trium terioꝝ vt maximus ad mĩmũ: ita dr̃ia maiorũ ad dr̃iam minorum. Sit ergo c quicũq; nũerus partem tertiam habens que sit e: duplo c. sitq; duplatus a. manifestũ est a ad c esse duplum. et q2 c ꝯtinet tria e: ip̃m a ꝯtinet sex e. addo e ad c ⁊ fiat b

et erit notū b ad c esse sesquitertiū: et b cōtinere quattuor e atq; e esse dr̄iam b ad c. Itidē q: b cōtinet quattuor e et a cōtinet sex e: a erit sesqualter ad b. et q: b equatur quattuor e/ et a sex: ergo dr̄ia a ad b. equatur duobus e que sit d. quia eni d equat̄ duobus e: ergo d duplus est ad e. dico ergo a b c datam esse harmonicam medietatem: inter cuius termīos a b c ⁊ eoꝝ differentias d e oēs musice consonātie reperiātur. nam a ad b maximi ad mīmū mōstrata est ꝓportio eē dupla et sīliter habitudo d ad e dr̄ie scȝ maiorū ad differētiam minorū etiā ostensa dupla. sunt igitur per diffinitiōem a b c termini in harmonica medietate ꝯstituti. At si b ad c cōpares mōstratus est sesquitertius: quare ꝯsonātie diatessaron interuallū. et si a ad b: mōstratus est sesqualter atq; hemiolus et diapēte interuallū. et si a ad c: duplū habes ⁊ ꝯsonantiā diapason. si v̄o c ad e cōtuleris: habes triplū: et ꝑ vicesimāquintā tertij ꝯsonantiā cōpositam diapason ac diapente. et si b ad e: quadruplū/ et per vicesimāseptimam tertij bis diapason. at cū cetera mōstrata sint non eē consonātias: cōstat diatessaron/ diapente/ diapason/ diapason ac diapente/ ⁊ bis diapason oēs consonātias quibus in disciplinis se exercere solent musici: inter termīos harmonice medietatis ⁊ eoꝝ differētias: fuisse repertas. et si duxeris binariū in a b c ⁊ in illos q̄ inde ꝓuenerint et quoties volueris in ꝓueniētes: ex septima secūdi Arithmetices cognoscere prōptum est toties cōstitui harmonicam medietatem cōsimiles inter suos terīos ⁊ suorū terīoꝝ dr̄ias: cōsonātias musicas seruātem. et idem fuerit si quēcunq; alterū numerum in illos terīos duxeris. placuit tñ diuo Seuerino quadragesimo octauo capite secūdi sue Arithmetices ad oēs ꝯsonātias musicas cōplectēdas: duas ordinare medietates harmonicas: vnam in duplari/ et alteram in triplari. sed ⁊ idem etiā fieri posse vna sola constituta iam satis monstratum arbitranur.

33 ¶ Quotlibet maximas harmonias quaꝝ quelibet primordium consonantiarū / consonātiasq; contineat omnes: constituere.

Maxima har.	24	18	16	12			
Maxima har.	12	9	8	6	Epogdous	b c	Tonus
	a	b	c	d	Epitritus	a b	Diatessaron
Differentie	3			3	Hemiolus	a c	Diapente
	c			f	Duplaris	a d	Diapason
Differentie	4			2	Triplaris	d h	Diapason diapēte
	g			h	Quadruplus	c h	Bis diapason.

¶ Maximam harmoniam vocant qñ quattuor solidorū terioꝝ in geometrica medietate cōstitutorū: inter maxim/ vnū mediorum ⁊ mīmū medietas Arithmetica ꝯtinet̄: et rursum inter maxim teriorū/ alterū mediorū/ et mīmū cōtinetur harmonica. Medietas geometrica est qñ terminorū est ꝓportionū sīltudo. Arithmetica v̄o qñ teriorū est differētiarū equalitas. quid harmonica iam dictū est. Solidi termini dicunt̄ qui ex triū in se laterū ductu ꝓducūtur. sed hec oīa ex Arithmeticis ꝯnotissima sunt. Primordium ꝯsonātiaꝝ appellamus tonum. ¶ Capio ergo d numerū quēcūq; qui scdam ⁊ tertiam hēat: sitq; eius secūda f et tertia h. duplo d et sit duplatus a: quiquidē a duplus erit ad d. addo b ad d sitq; cōpositus c. eritq; sesquitertius ad d. sed et cū a mōstratus sit duplus ad d: ꝗ per vndecimam ꝑmi huius a ad c est sesqualter. Preterea f scdam partem d addo ipi d et cōpositus sit b: certū est b ad d esse sesqualterū. q̄re ꝑ eādē vndecimam ꝑmi a ad b est sesquitertius. Ab a c igit̄ qui mōstratus ē sesqualter: ablato a b sesquitertio per quītādecimā primi relinqtur b ad c sesquioctauus. Sit preterea g dr̄ia a ad c q: d ꝯtinet tria h: c continebit q̄ttuor et a sex. ergo g dr̄ia a ad c ꝯtinet duo h. est itaq; g ad h duplus. et quia f est medietas d/ et b est sesqualterū ad d: ergo b cōtinet tria f. est itaq; f tertia ps b. sed ⁊ a sesquitertius ad b addit sup eū tertiā ptem ipius b: ergo dr̄ia a ad b que sit e equat̄ f. dico ergo a/ b/ c/ d maximā cōstituere harmoniam: que tonū ꝯsonātiarū elementum/ ⁊ oēm cōplectit̄ ꝯsonantiā. Nam a ad b mōstratus sesquitertius ⁊ sīlīter c ad d sesquitertius. cōtinēt igit̄ a ad b et c ad d per diffinitiōem: geometricam medietatem. et dr̄ia a ad b maximi ad vnū medioꝝ est e/ et b ad d eiusdē medij ad mīmū est f/ et e ⁊ f mōstrate sunt equari. igitur per diffinitiōem a ad b et b ad c constituūtur in Arithmetica medietate. sed ⁊ a ad d maximus ad mīmū mōstratus est duplus: et sīliter g dr̄ia a ad c maximi ad reliquū medioꝝ demōstrata dupla ad h dr̄iam c ad d eiusdem medij ad mīmū. igitur per diffinitiōem a c d ꝯsistūt in harmonica medietate. Cōstat igit̄ ꝑ diffinitiōem a/ b/ c/ d si solidi sint cōstituere maxiam harmoniam. q si solidi non sint: duc quēcunq; nūerū in quēlibet ipsoꝝ et ꝓueniēt solidi in eisdem habitudinibus quoꝝ cuiuslibet latera erūt vnitas/ numerus in illos ductus et singuli eoꝝ ad singulos: sicq; cōstabit maxiam constitutam esse harmoniam. sed iam ostensus est b ad c sesquioctauus: igitur per diffinitiōem b ad c cōtinet tonū consonātiarū ꝑmordiū. et a ad b est sesquitertius. igit̄ a ad b ꝯtinet diatessaron. et a ad c mōstratus est sesqualter: igitur a ad c cōtinet diapente. et a ad d duplus: igitur a ad d diapason. et d ad h triplus: igitur d ad h diapason ac diapente. et c ad h mōstratus quadruplus: igitur c ad h cōtinet bis diapason. et quoties duxeris quēcunq; numerum in a/ b/ c/ d aut in ꝓductos ex illis adiuuāte septima secundi Arithmetices ⁊ diffinitiōibus: toties cōstitues maximā harmoniā: tonum et oēs consonātias continentem. est igit̄ effectum qd̄ ꝓponebatur. Et ex hac intelligere potes esse demōstratum que diuus Seuerinus affert de harmonia cubi quadragesimonono/ et de maxima harmonia quinquagesimoquarto capite secundi sue Arithmetices.

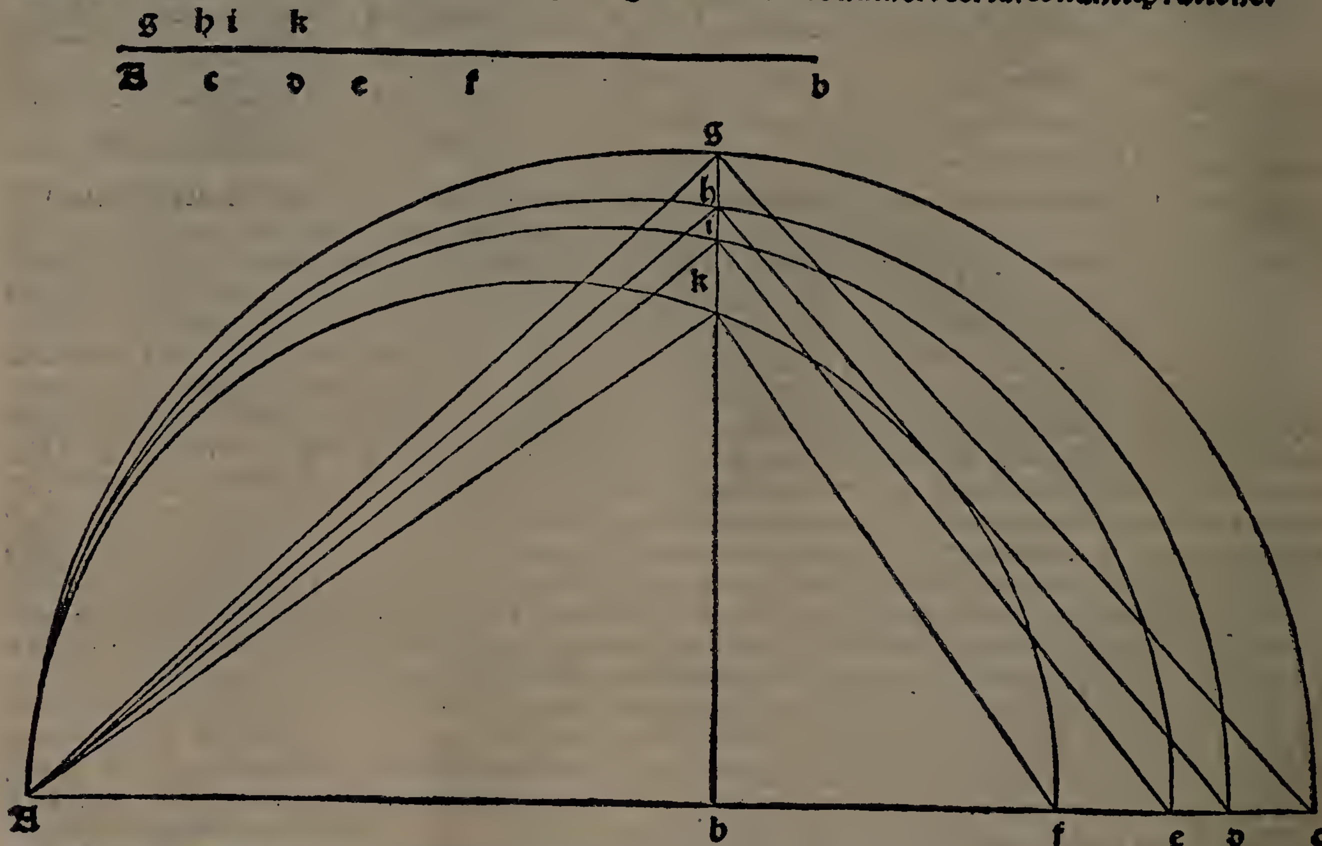
34 ¶ Ois numerus ternaria ꝓgressione ad se adiectus: oēm consonantiam in Arithmetica medietate complet.

Cōsonātie ī Arithmetica medietate				A prima vnitate				A scđa vnitate				A tertia vnitate			
3	6	9	12	1	2	3	4	10	20	30	40	100	200	300	400
duplus diapason		sesquitertiꝰ diates.		duplar		epitritꝰ		diapas.		diates.		diapason		diatessa.	
	sesqualter diapēte				hemiol.				diapē.				diapente		
Triplus. diapason diapē.				Triplaris				diapa. diap				diapa. diapēte			
Quadruplus. bis diapason				Quadruplaris				Bis diapason				Bis diapason			

¶ Intelligitur ternaria ꝓgressiōe ad se addi numerus qn̄ additur p̄mo ad se semel/ deinde bis/ deinde ter. dico ergo quēcunq̨ numerū ad se hoc pacto additum: oēm cōstituere consonātiaȝ musicam. Nam semel sibi adiectus: duplex ad se efficit/ ⁊ diapason consonātiam. et bis sibi additus: ad primā additionem sesqualter cōstituit ⁊ diapente: et ad se triplū atq̨ diapason ac diapente. nam in p̄ma additiōe bis/ ⁊ in secūda ter cōtinetur. tertio sibi additus ad scđaȝ additiōem facit sesquitertiū ⁊ diatessaron: nam primus nūerus hic quater/ illic vero ter cōtinetur. et ad se quadruplū facit et bis diapason. in hac igitur ꝓgressione oīs cōtinetur cōsonātia musica. et q2 cōtinue numerorū ex eius additiōe surgentiū ipse numerus additus est differētia: ergo reperte consonātie in Arithmetica medietate continetur. et ex hac cognoscitur cur in oīm vnitatum quaternaria ꝓgressione que vbiq̨ denarij Pythagorica plenitudinem implet: oēs consonantie musice et in Arithmetica quidem medietate reperiātur.

¶ Tonum et oēm consonantiam simplicem: in duo equa partiri/ veraq̨ medietatum puncta in chorda: geometrice monstrare. 35

¶ Precedētes septima scđi/ ⁊ vicesimatertia tertij pretēdūt tonū/ diatessaron/ diapēte ac diapason: in duo equa diuidi non posse. hec vero mōstrat quo pacto ea omnia possint in duo equa partiri. nec hoc quidē repugnat. Nā precedētes contēdunt id effici non posse Arithmetice certo/ cōstitutoq̨ numero/ atq̨ ratiōali habitudine: hec vero id effici posse geometrice sine numeri certa/ cōstantiq̨ ratione.



¶ Sit ergo data chorda a b superior in qua iubeamur integrum semitonium/ et ꝯsonātiarū diatessaron/ diapente/ ac diapason vera media reperire. facio a b ⁊ c b tonum. a b et d b diatessaron. a b ⁊ e b diapente. a b et f b diapason eo qui in precedētibus mōstratus est modo. deinde in inferiori linea a c indefinite quātitatis capio a b equalē linee superiori a b et b c ꝯtinue equalem linee b c superiori. et a puncto b versus c capio lineam b d equalem chorde b d et b e equalē chorde b e et b f chorde b f. et intelligo q̄tuor dimidios circulos a c/ a d/ a e/ a f. et a puncto b educo perpēdicularē linee a c ad circūferētias semicirculorū a c/ a d/ a e/ a f. et pūcta vbi eos cōtingit linea sint g/ h/ i/ k: ad que pūcta educo a g/ c g/ a h/ d h/ a i/ e i/ a k/ f k. at per nonā sexti geometrie a b ad b g vt b g ad b c. facio igitur in chorda superiore a b lineam b g equalē inferiori linee b g et cū ꝓportio a b ad g b vt g b ad c b vt preostēsum est: sequitur tonum a b ⁊ c b esse in duo equa diuisum: ⁊ pūctū g esse medium veri semitonij signū. et per eādem que ꝓportio a b ad b h ea sit b h ad b d. esto igitur h b in chorda a b equalis linee b h per idem vt prius: ea erit ꝓportio a b ad h b que h b ad d b. quare a b et d b diatessaron in duo equa partita est. et eodem pacto facta chorda i b superiori equali linee b i. et chorda k b equali linee b k: mōstrabis cō-

sonãtias diapẽte ⁊ diapason in duo equa esse partitas. et re vero hoc pacto vero schismata atq; diaschismata / et dieses tetrartemerias reperias assignat; cõmatis / dieseos / atq; cõpleti semitonij interuallis et sumptis vt in precedentibus factum est medijs ꝓportiõalibus chordis. sed hec statim aliq̃tulum in geometricis exercitatis nota esse possunt. Hec aũt posteaq̃ repereris disce (si libet) per chordam in voce tonum mediare / et semitonium: et quãcunq; voles in arte musica consonantiam.

¶ Tertij elementorum Musices finis.

Armonica regula instrumentũ est: quo cum (ratiõis adhibito iudicio) consonantie / consonãtiarũq; partes: in chorda perquirũtur. Melorũ tria sũt genera: Diatonicum / Chromaticũ / Enarmonicũ. Diatonicum genus: melos est cuius partitio per semitonium minus ⁊ duos tonos cõtinue ꝓcedit. Chromaticum: qd per duo inequalia semitonia ⁊ trihemitonium cõscẽdit. Enarmonicũ vero: qd per duas dieses conscẽdit et ditonum. Diesis hoc in loco semitonij minoris medietas est: ex differẽtie extremoꝝ habitudinis eius: partitione ꝓueniens: que ⁊ tetrartemeria dicta est. sed vt eaꝝ semꝑ maior que acutior / et minor q̃ grauior: reperiatur necesse est. Voces / nerui / chorde / spacia: hoc ordie a graui in acumen nitentia in vnoq̃q; melorum gñe sunt nũcupata.

Grece nuncupationes	Nuncupationes latine.
¶ Proslambanomenos	Acquisitus
Hypate hypaton	Principalis principalium
Parhypate hypaton	Subprincipalis principalium
Lichanos hypaton	Index principalium
Hypate meson	Principalis mediarum
Parhypate meson	Subprincipalis mediarum
Lichanos meson	Index mediarum
Mese	Media
Trite synezeugmenon	Tertia coniunctarum
Paranete synezeugmenon	Penultima coniunctarum
Nete synezeugmenon	Ultima coniunctarum
Paramese diezeugmenon	Submedia disiunctarum
Trite diezeugmenon	Tertia disiunctarum
Paranete diezeugmenon	Penultima disiunctarum
Nete diezeugmenon	Ultima disiunctarum
Trite hyperboleon	Tertia excellentium
Paranete hyperboleon	Penultima excellentium
Nete hyperboleon	Ultima excellentium

¶ Monochordum: est qd vnica chorda cõtinet modulatiõem. Tetrachordum: quod chordis quattuor. Polichordum vero: quod pluribus chordis id cõtinet q̃ quattuor. vt pentachordum: qd quinq;. hexachordum: quod sex. et ita de heptachordo / octochordo / ennachordo / decachordo / endecachordo / dodecachordo / tridecachordo / tessaradecachordo / ⁊ pentadecachordo est intelligendum: qd vltimum oĩo quindecim constat chordis. ¶ Proslambanomenos: est in vnoq̃q; genere: primo tetrachordorũ grauissimus neruus adiũctus: a ꝓximo primi tetrachordi neruo: toni interuallo distãs. Tetrachordum coniũctũ: est cuius principiũ est precedẽtis tetrachordi finis. Disiũctum vero: cuius primordialis neruus in vnoquoq; melorum genere: a ꝓximo precedentis tetrachordi finali neruo: vno tono disiungitur.

¶ Tetrachorda sunt quiqꝫ: Tetrachordū hypaton/Tetrachordū meson/Synezeugmenon/Diezeugmenon/Hyperboleon.

¶ Tetrachordum hypaton est:	Tetrachordum synezeugmenon.
Hypate hypaton	Mese
Parhypate hypaton	Trite synezeugmenon
Lichanos hypaton	Paranete synezeugmenon
Hypate meson	Nete synezeugmenon
Tetrachordum meson est:	Tetrachordon diezeugmenon.
Hypate meson	Paramese diezeugmenon
Parhypate meson	Trite diezeugmenon
Lichanos meson	Paranete diezeugmenon
Mese	Nete diezeugmenon

Tetrachordum hyperboleon
Nete diezeugmenon
Trite hyperboleon
Paranete hyperboleon
Nete hyperboleon

¶ Modū hic vocamus remissionem aut intensionem oīm tetrarchordorū gradatim in aliquo genere melorum:sui generis progressionem seruans.

¶ Modi sunt septem.

¶ Primus Hypodorius	1
Secundus Hypophrygius	2
Tertius Hypolydius	3
Quartus Dorius	4
Quintus Phrygius	5
Sextus Lydius	6
Septimus Mixolydius	7

¶ Monochordi regularis partitionem:in diatonico genere demonstrare.

¶ Quāuis instrumēta musices q̄plura reperiātur vt Cithare/Tibie/Tube/Litui/Multiforatiles fistule:Dextre/Leue/Simplices/Duplices: in quib⁹ vno spiritu animādis vt inquit Apuleius.fert Hiagnis Lydorū rex Marsieqꝫ pater pmus in canēdo manus discapedinasse:prefea vt Pelte/Chordaciste/Sambuci/Hydraule/Nabilie/Psalteria/Magades/Barbiti/Naula/Pētades/ Cornua/Heptagona/Mele/Testudo/Barbati/Plectra/Monochorda/Tetrachorda/Polychorda:et cetera id gen⁹ musica instrumēta.placnit tñ Philosophis in Monochordis|Tetrachordis|atqꝫ Polychordis monstrādis:ceterorū nos intelligere rōem|atqꝫ compositionem.quocirca vt de Monochordorum et Tetrachordorū compositione intelligenius:ita de reliquis est intelligendum.nunc ergo ad Monochordi regularis nos ostensionem cōuertamus.

Monochordū diatonicum.

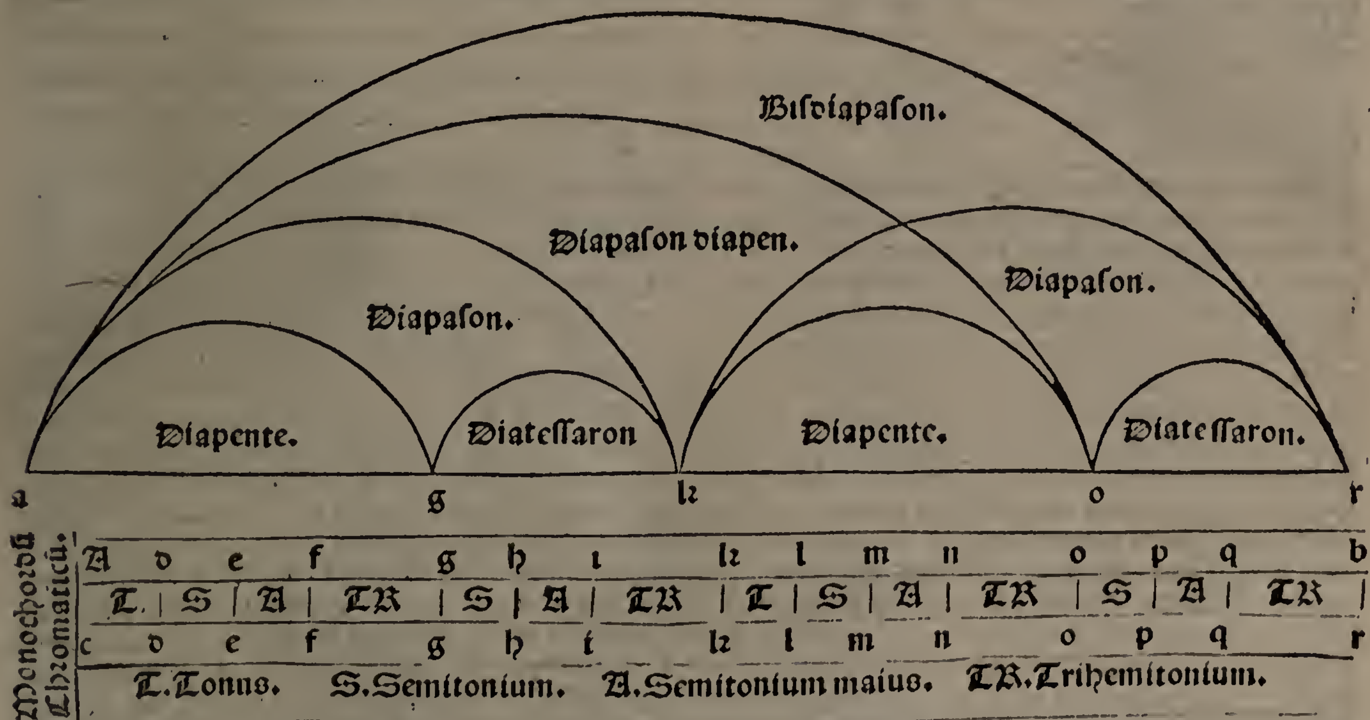
A	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p	q	b
T	S	T	T	S	T	T	T	S	T	T	S	T	T	
c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p	q	r

T Tonus S Semitonium minus

¶ Monochordum igit regłare iccirco dicitur qꝫ in vnico neruo musice consonātie harmonica regula peruestigētur.Sit ergo a b chorda in qua volumus in diatonico gñe cōsonātias regularit collocare.

Accipio c planissimã regulam/ nullaq̃ ex parte subsultãtem: equalem linee a b. et per primã ⁊ decimã octauam secũdi huius ab c in d intẽdo tonum. et ab d in e semitoniũ minus. et ab e in f ⁊ f in g intẽdo duos tonos. et ab g in h semitoniũ minus. ab h in i et i in k duos tonos. Rursus ab k in l tonum. et ab l in m semitonium minus. ab m in n et n in o duos tonos. ab o in p semitoniũ. ab p in q et q in r duos tonos. ita q̃ ɔtinue semitonio minori subiũcti sint duo toni: dẽptis c d qui ꝓ proslambanomeno ꝑmo semitonio prepositus est tonus: et k l tono qui tetrachordi diezeugmeni hoc est disiũcti principiũ est. Rursum applico totam regulã harmonicam c r toti chorde a b. itavt c sit cum a/ et r cũ b. et in chorda a b vbi applicãtur d/ e/ f/ g/ ⁊ reliquẽ sectionum regule note: signo d/ e/ f/ g/ h/ i/ k/ l/ m/ n/ o/ p/ q et dico monochordũ a b esse in gñe diatonico regulariter diuisum. Q̃m enĩ sua interualla intẽruallis reglẽ c r rñdent/ euadũtq̃ equalia a b et d b sonat tonũ et d b et e b semitoniũ: et iterũ e b et f b tonũ ɔtinet. igitur a b et f b duos tonos ⁊ semitoniũ minus ɔtinẽs: per sextam tertij ɔsonat diatessaron. Et quia f b et g b vt in regula cõtinet tonum. et g b et h b semitonium minus. et h b: i b. ⁊ i b ⁊ k b duos tonos. ergo per decimam tertij f b et k b tres tonos semitoniũq̃ minus cõtinens: cõcinit diapẽte. Sed ⁊ mõstratũ est a b ⁊ f b modulari diatessaron: ꝙ per vicesimam tertij a b et k b qđ ex cõsonãtijs diatessaron ⁊ diapente cõsurgit coalitum: cõsonat diapason. Rursus k b et l b sonat tonum/ l b et m b semitonium minus m b n b et o b duos tonos: quare k b et o b tres tonos ⁊ semitoniũ minus cõtinens: per decimã tertij cõsonat diapẽte. Sed a b et k b mõstrata est diapason cõsonãtia: ergo a b ⁊ o b cõsonat diapason ac diapẽte. Preterea q2 o b ⁊ p b semitoniũ est et p b q b et b duo toni: ergo o b et b cõcinit diatessaron. k b igitur et b ex diapente/ diatessaronq̃ cõstans: per vicesimã tertij cõsonat diapason. At xo a b ⁊ k b itidẽ mõstratũ est cõcinere diapason. ergo a b ⁊ b ɔcinũt bis diapason. Et q2 hec monochordi partitio per semitoniũ ⁊ duos tonos facta ꝓcessit: et ee que modo mõstrate sunt cõsonantie harmonice regule suffragio peruestigate: ergo monochordi reglãris partitio in genere diatonico per diffinitiõem mõstrata est. quod est propositum.

2 Monochordi regularis constitutionem: in genere Chromatico declarare.



In omni Monochordo/ atq̃ Polyphordo hec obẜuaẜ ꝓpẽtas vt octaua modo nota/ modo chorda prime: et decimaquĩta octaue: in consonãtia diapason recrepet. et vbiq̃ ꝓ proslambanomeno preiũgiẜ tonus/ inẜseriẜq̃ vbiq̃ inter mesen atq̃ paramesen ꝓ concẽtu disiũcto tonus. hoc est in monochordis a prima nota in scđam et ab octaua in nonam collocatur tonus. Sit ergo a b vt prius chorda in qua volumus cõsonantias in genere chromatico regulariter reperire. capio c r regulam planissimã et illi assignare corde equã. facioq̃ per primam secũdi huius c d tonum: et p decimãoctauã eiusdẽ d e semitoniũ minus: et itex per primam d f toni interuallũ. erit ergo e f semitoniũ maius: et d e et e f duo semitonia: sc3 ⁊ ab f ad g metior tonum ⁊ semitoniũ min9: que equa erũt trihemitonio: et g h et h i facio duo semitonia: minus sc3 atq̃ maius et i k extẽdo ad tonũ ⁊ semitoniũ minus. Simili quoq̃ pacto k l fiat tonus: et l/ m/ n duo semitonio: et n o trihemitoniũ. et itex o/ p/ q duo semitonia: q r xo trihemitonium. Et regulã hoc pacto diuisam applico ex equo linee a b: et in linea a b signo ɔsimiles ⁊ ɔsiẜib9 distãtijs notas: sc3 a| d| e| f| g| h| i| k| l| m n| o p q| b. quo pacto dico lineam a b esse regẜariter in melodia chromatica diuisam. Nã c d tonus et d f tonus et f g tonus ⁊ semitoniũ minus. quare a ⁊ g continent tres tonos ⁊ semitoniũ minus. ergo per decimã tertij a ad g cõsonat diapẽte. et q2 g h i cõtinent tonũ: et i k trihemitoniũ: igitur g ad k duos tonos ⁊ semitoniũ minus cõtinens per sextam tertij modulaẜ diatessaron. sed et a g ꝓbata est diapente: ergo a k cõstans ex a g et g k diapente ⁊ diatessaron per vicesimam tertij cõcinit diapason. Et penitus eadem rõne ꝓbaueris k o cõsonare diapente/ et k b diapason. quare a o diapason ac diapente ⁊ a b recrepabit bis diapason: quã consonãtiã nos trãscẽdere Pythagoricorũ vetat autoritas. qui tñ volet vlterius conscẽdere ex his q̃ iam demõstrata sunt ⁊ que

postea demōstrāda suscipient̄:facile cōscēdet.Et cū iam mōstrata partitio per semitoniū ⁊ semitoniū et trihemitoniū processerit:nisi vbi integer adiectus est tonus vt tum diapason|tum cōcētus disiūcti seruet̄ ꝓpetas:Patet ꝙ ex diffinitiōe factū eē qđ in chromatico gñe ꝓponebat̄ faciēdū atq̧ ꝓpositū.

ℂ Idem:in enarmonico genere regulariter ostendere. 3

A						Monochordum Enarmonicum.								b
T	D	D	TT	D	D	TT	T	D	D	TT	D	D	TT	
c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p	q	r

D.Diesis tetrartemeria. TT.Ditonus.

ℂ Sit vt prius chorda a b et c r regula eidem vt in ceteris equa:ab puncto c ad d extēdo tonum:et ab d ad f semitoniū min⁹:et spaciū d f partior in equalia per notam e.eruntq̧ d e f due dieses.et f g facio duos tonos:qui ditonū implent.g h i vt prius duas dieses. i k ditonum.k l tonum.l m n duas dieses. n o ditonum.o p q duas dieses.et q r ditonum.quā regulā hoc pacto partitam equalit̄ applico linee a b:et siles notas/equaliaq̧ interualla in linea a b designo per medias inter a ⁊ b litteras d|e|f|g|h|i|k l/m|n|o|p|q b.et quia a d ton⁹:et d e f due dieses semitoniū minus implentes:et f g ditonus:ergo a g tres toni ⁊ semitonium minus per decimam tertij sonāt diapente.sed ⁊ g h i due dieses et i k ditonus duos tonos et semitoniū minus cōtinētes:per sextam tertij sunt diatessaron.igit̄ vt prius ꝑ vicesimā tertij a k cōtinet diapason.et hoc pacto mōstret̄ k o cōtinere diapēte:et k b diapason:q̄re a o ꝯsonare diapason ac diapente|et a ad b cōsonare bis diapason.et q: hec modulationis ꝓgressio ꝑ duas dieses et ditonū ꝓcedit: cōstat per diffinitiōem monochordū enarmoniū regularit̄ esse partitū: in eoq̧ musicas situatas esse consonātias et propositum.

ℂ Tetrachordum hypaton:in diatonico melo diuidere. 4

Proslambanomenos	A	A	
Hypate Hypaton	b	T	B
Parhypate Hypaton	c	S	C
Lichanos Hypaton	d	T	D
Hypate Meson	e	T	E

ℂ Superiores:Monochorda docuerūt ordinare.Inferiores aūt:Tetrachorda|Pētachorda|Hexachorda et alia queq̧ Polychorda ad Penthadecachordū vsq̧: quibus cognitis cetera que amplius desiderarētur cognoscent̄ facillime.Cōstituo ergo b c d e tetrachordū hypaton:ita vt b sit hypate hypaton|c parhypate hypaton|d Lichanos hypaton|e Hypate meson:cui preiūgo ad grauitatꝭ partē a Proslambanomenon chordam quidē que in tetrachordis non computatur: sed primo adiecta tetrachordo creat pēthachordum.facio ergo interuallum chorde a sesquioctauū ad chordam b|⁊ sesquitertium ad chordā d|et sesqualterū ad e.Item facio c ad d sesquioctauū.dico ergo tetrachordū hypaton in genere diatonico (vt dictū est)esse diuisum.Nā per diffinitiōem a ad b proslambanomenos ad hypaten hypaton:erit tonus.et quia a ad d sesquitertiū est:itidem per diffinitiōeȝ proslābanomenos ad lichanon hypaton concinit diatessaron.sed et cū a ad e proslambanomenos ad hypaten meson sit sesqualterū:per idem a ad e cōsonat diapente.per decimātertiam igitur tertij d ab e lichanos hypaton ab hypate meson tono disiungit̄.Rursum q: c ad d sesquioctauū est:ergo c ad d sonat tonū.at ꝗ̄ a ad d diatessaron est:et a b tonus est|et c d tonus:igitur per sextam tertij b ad c relinq̄tur semitonium minus.Est itaq̧ hypate hypaton ad parhypaten hypaton semitoniū min⁹.et parhypate hypaton ad lichanon hypaton ton⁹:lichanos hypaton ad hypaten meson ton⁹.cōstitutū est ꝙ b|c|d|e tetrachordū hypaton:per semitoniū minus ⁊ duos subiūctos tonos ꝓcedēs:per diffinitiōem in genere diatonico pariter ⁊ pēthachordū a|b|c|d|e. Sed incidit dubitatio forsan:cur nr̄a tempestate musici duos tonos ad tetrachordoꝝ partem seriam|grauēq̧ prelocāt: nos aūt solū tonum qui est proslambanomeni atq̧ hypates hypaton:responsio peruia|in prōptuq̧ est musicos nostra tempestate proslambanomeno alteram chordam tono distantem prefixisse et id primum memorāt Gregorium factitasse.

ℂ In eodem diatonico melo : tetrachordum meson subiungere.et in octochordo : a proslambanomeno in mesen:diapason contineri. 5

Proslambanomenos	A	A	
Hypate Hypaton	b	T	B
Parhypate Hypaton	c	S	C
Lichanos Hypaton	d	T	D
Hypate Meson	e	T	E
Parhypate Meson	f	S	F
Lichanos Meson	g	T	G
Mese	h	T	H

ℂ Sit e|f|g|h tetrachordū meson.facio e sesquitertiū ad h|et g sesquioctauum ad h|et f sesquioctauū ad g:erit ergo per diffinitionem e ad h hypate meson ad mesen diatessaron.et q: g ad h tonus ⁊ silr̄ter

f ad g tonus. nam vtrūqꝫ ex sesquioctaua ꝓportiōe nascitur. ergo p sextam tertīj e ad f erit semitoniū minus. est itaqꝫ e|f|g|h tetrachordum meson per semitonium minus ⁊ duos tonos ꝓcedens in genere diatonico diuisum. et q2 a e proslambanomenos ⁊ hypate meson in precedēti mōstrata sunt cōsonare diapente: et in p̄senti e h hypate meson ⁊ mese diatessaron. ergo per vicesimā tertīj: porslābanomenos ad mesen cōsonat diapason. cōtinet igitur octochordum a|b|c|d|e|f|g|h consonātiam diapason. quod est totum propositum.

6 ¶ Preposito octochordo: in eodem genere tetrachordum disiunctarum submittere. et dodecachordum diapason ac diapente continere.

Proslambanomenos	A |		A
Hypate hypaton	b |		b
Parhypate hypaton	c |		c
Lichanos hypaton	d |		d
Hypate meson	e |		e
Parhypate meson	f |		f
Lichanos meson	g |		g
Mese	h |		h
Paramese diezeugmenon	k |	Trite coniunctarum	k
Trite diezeugmenon	l |	Paranete cōiunctarū	l
Paranete diezeugmenon	m |	Nete coniunctarum	m
Nete diezeugmenon	n |		n

¶ Sit k l m n tetrachordū diezeugmenon quot et disiunctarū dicit. facio h ad k mesen ad paramesen disiunctarū sesquioctauā. et ad m paraneten disiunctaꝝ sesquitertiā. ad n vero neten disiunctarū sesqualterā. deinde l ad m triten ad paranetē facio sesquioctauā: sic ergo mese ad paranetē disiūctarum cōcinit diatessaron et ad neten diapente. est ergo per decimātertiam tertīj m ad n paranetes ad neten toni interuallū. et l ad m tritēs diezeugmenō ad paranetē similit tonus est. sed ⁊ cū mese ad paranetē cōsonet diatessaron et l ad m sit tonus ⁊ similit h ad k tonus ergo per sextā tertīj k ad l erit semitoniū minus. erit itaqꝫ paramese ad triten diezeugmenō semitoniū minus: trite ad paraneten tonus: et paranete ad neten diezeugmenon ꝯsimiliter tonus. quare tetrachordū disiunctaꝝ superiori octochordo in diatonico genere subiunctū est. Et cum precedens mōstrauerit a h esse diapason et presens h n esse diapēte: igit a n proslābanomenos ⁊ nete diezeugmenō in dodecachordo a b c n cōtinent diapason ac diapente. Q si in moliori canēdi modo: tetrachordū a chorda mese coniūctū partiri/ cōstituereqꝫ volemus: sit id tetrachordū h k l m: que sunt mese trite synezeugmenō paranete synezeugmenō nete synezeugmenō: facioqꝫ mesen ad neten synezeugmenon sesquitertiā. quare ⁊ cōcinentē diatessaron et l ad m paranetē synezeugmenō ad neten tono distātem pariter et k ad l tono. erit ergo per sextā tertīj h ad k meses ad triten synezeugmenon semitonīj minoris interuallū et k l ⁊ l m duo toni ⁊ tetrachordum synezeugmenon hoc est disiunctarū in genere diatonico diuisum.

7 ¶ Tetrachordum hyperbolèon in eodem diatonico genere predictis copulare: et in pentadecachordo: bis diapason consonātiam compleri

A re	Proslambanomenos	A |			A
b mi	Hypate hypaton	b |			b
c faut	Parhypate hypaton	c |			c
d solre	Lichanos hypaton	d |			d
e lami	Hypate meson	e |			e
F faut	Parhypate meson	f |			f
G solreut	Lichanos meson	g |			g
a lamire	Mese	h |			h
b mi	Paramese diezeugmenō	k |	b fa	Trite syn.	k
C solfaut	Trite diezeugmenon	l |	c solfaut	Paranete syn.	l
d lasolre	Paranete diezeugmenon	m |	d lasolre	Nete syn.	m
e lami	Nete	n |			n
f faut	Trite hyperboleon	o |			o
G solreut	Paranete hyperboleon	p |			p
a lamire	Nete hyperboleon	q |			q

	Tetrachordū hypaton							Tetrachordū diezeug.								
	To.	Semi.	To.	To.	Semi.	To.	To.	To.	Semi.	To.	To.	Semi.	To.	To.		
A	b	c	d	e	f	g	h	k	l	m	n	o	p	q		
				Tetrachordū meson							Tetrachordū hypboleō					

Sit n o p q tetrachordū hyperboleon facio vt in prioribus n neten diezeugmenon ad q netē hyperboleon sesquitertiā: et iccirco ad eam cōcinentem diatessaron. et p ad q facio toni interuallū. et o ad p itidem toni interuallū. per sextam tertij n ad o erit semitoniū minus. est ergo tetrachordum hyperboleon n o p q ex semitonio minore duobus subiunctis tonis in genere diatonico dimēsum. sed et per precedentē h mese ad n neten diezeugmenon consonat diapente: ergo h ad q mese ad neten hyperboleon ex cōsonantia diapente et diatessaron constans: cōsonat diapason. ergo a ad q proslābanomenos ad netē hyperboleon cōsonabit bis diapason. et cum totum polychordum a q omnino quindecim perficiatur chordis: in pētadecachordo et in genere diatonico cōstitutum est bis diapason. qd est totū propositū.

Pentadecachordi in diatonica melodia constituti: numeros reperire. 8

Proslambanomenos	A	9	216	1728	13824	
Hypate hypaton	b	8	192	1536	12288	Tonus
Parhypate hypaton	c			1458	11664	Semi. minus
Lichanos hypaton	d		162	1296	10368	Tonus
Hypate meson	e		144	1152	9216	Tonus
Parhypate meson	f				8748	Semi. minus
Lichanos meson	g			972	77[illegible]	Tonus
Mese	h		108	864	6912	Tonus
Paramese diezeugmenō	k			768	6144	Tonus
Trite diezeugmenon	l			729	5832	Semi. minus
Paranete diezeugmenō	m		81	648	5184	Tonus
Nete diezeugmenon	n		72	576	4608	Tonus
Trite hyperboleon	o				4374	Semi. minus
Paranete hyperboleon	p			485	3888	Tonus
Nete hyperboleon	q		54	432	3456	Tonus
		pm9	scdus	tertius	qrtus loc9	

Numeri qui in musica disciplina precipue desiderantur: sunt duplares / triplares / quadruplares / hemiolij / epitriti epogdoi: hoc est dupli / tripli / quadrupli / sesqualteri / sesquitertij / et sesquioctaui. quo circa si desiderus cognoscere ad quem numerū numerus maior est duplus: ipsum partire per duo. Ad quem trip us partire per tria. Ad quem quadruplus partire per quattuor. Ad quem sesqualter partire per tria et tertiā auge per duo. Ad quem sesquitertius partire per quattuor et quartā auge per tria. Ad quem sesquioctauus partire per nouem et nonam auge per octo. Et numeri: per octauā secundi Arithmetices vbique surgent petiti: si maior duplus / triplus / quadruplus / sesqualter / sesquitertius / aut sesquioctau9 est. Et si rursum cognoscere desideras quē numerus minor duplū habet: ipsum auge per duo. Quem triplum: auge per tria. Quem quadruplū: auge per quattuor. Quem sesqualterū: partire per duo et illi medietatē adde. Quem sesquitertiū: partire per tria / et tertiam adde. Quem sesquioctauū: partire per octo / et octauam adde. Et statim per eandē octauā et diffinitiones cognosces petitū. Sed nunc ad monstrandū propositum nos cōuertamus. Sit pentadecachordū in diatonico genere modo repertum: cuius numeri querūtur: a b c d e f g h i k l m n o p q. duco in seinuicem duo / tria / quattuor / et minimos toni: hoc est vigintiquattuor: in 9 et 8 minimos terminos toni et veniant in secundo loco a b que per septimā secundi arithmetices sunt in proportione sesquioctaua / et continentia tonum. capio sesquitertiū numeri a: sitque d / et sesqualterū qui sit e et subduplū qui sit h. Rursum sumo sesquitertium numeri h qui sit m et sesqualterum qui sit n et eius subduplum qui sit q. quia a ad d est diatessaron et a ad e diapēte: ergo per decimātertiam tertij d ad e tonus est et eadē quoque ratione m ad n tonus. Et si d octauā partem haberet ea eidē adiecta facerē c sesquioctauū ad d: et c d cōtinentia tonū. modo autē quia d cōperitur octaua parte carere: augeo a b d e h m n q per octo: surgantque tertio loco a b d e h m n q: qui nūeri per eandē septimā adinuicē eandē seruabūt proportionē: quā et nūeri scdo loco positi. quia ergo d tertio loco positus habet octauā: ea igitur adiecta ad d fiat c: eritque c ad d sesquioctau9 atque cū eo tonū continēs. itidē adiecta octaua parte h ad h fiat g. et octaua parte m ad m fiat l. et octaua q.

ad q fiat p. eruntq; idētidem g ad h l ad m et p ad q sesquioctaui ⁊ numeri tonorum. et h comperitur habere nonam partē: illam augeo per octo et veniat k: eritq; h ad k per octauā secundi arithmetices sesquioctauus. Et si g octauā partem haberet facerē f sesquioctauū ad g. At vero qm̄ ea caret: augeo oēs numeros tertio loco repertos per octo et exurgant in quarto loco a b c d e g h k l m n p q: qui per eandē septimā erunt in eisdem adinuicē habitudinibus vt et numeri tertij loci. adiecta igitur octaua eius parte ad g facio f. ⁊ octaua parte ad p facio o. dico ergo numeros quarto loco cōstitutos esse numeros pētadecachordi. Nā a ad d est diatessaron / et a ad b tonus: ⁊ c ad d tonus. ergo per sextā tertij b ad c semitoniū minus. et q2 a h est diapason ⁊ a e diapente: ergo per vicesimā tertij e h est diatessarō et g h ⁊ f g monstrati sunt sesquioctaui atq; toni. ergo per sextā tertij e f est semitoniū minus. et eodē pacto ostendas k l et n o esse semitonia minora: ⁊ ceteri adinuicē sunt cogniti toni. igitur pentadecachordi diatonici numeri sunt reperti. Est enī numerus proslābanomeni ad numerū hypates hypatō tonus: ⁊ hypates hypaton ad parhypatē hypatō semitoniū minus. parhypates hypaton ad lichanō hypaton: et lichani ad hypaten meson duo toni. hypates meson ad parhypaten meson semitoniū minus. parhypates meson ad lichanō meson: et lichani ad mesen: ⁊ meses ad paramesen disiunctarum: tres toni. parameses ad triten semitoniū minus. trites ad paranetē / ⁊ paranetes ad neten: duo toni. Netes ad triten hyperboleon semitoniū minus. trites ad paraneten et paranetes ad neten duo toni. est igitur notum propositum.

9 Tres diatonice diatessarō consonātie species a proslambanomeno ad parhypatē meson cōcinunt. et quattuor diapente species a proslambanomeno ad triten diezeugmenon. septē vero diapason spēs inter proslābanomenon ⁊ paraneten hyperboleon.

		Species diatessarō			Species diapente				Species diapason						
Proslamba.	A	pma	scda	tertia	pma	scda	tertia	qrta	pma	scda	tertia	qrta	quita	sexta	septia
Hypate hyp.	b	To.	o	o	To.	o	o	o	To.	o	o	o	o	o	o
Parhyp. hyp.	c	Se.	Se.	o	Se.	o	o	o	Se.	Se.	o	o	o	o	o
Licha. hyp.	d	To.	ton9	ton9	To.	ton9	o	o	To.	ton9	tonus	o	o	o	o
Hypate me.	e		ton9	tonus	To.	ton9	o	o	To.	ton9	ton9	ton9	o	o	o
Parhyp. me.	f			Semi		Se.	Se.	o	Se.	Se.	Se.	Se.	Se.	o	o
Licha. me.	g					ton9	tonus	ton9	To.	ton9	ton9	ton9	ton9	ton9	o
Mese	h						tonus	ton9	To.	ton9	tonus	ton9	tonus	ton9	tonus
Para. die.	k						tonus	ton9		ton9	tonus	to[n9]	ton9	ton9	tonus
Trite die.	l							Se.			Se.	Se.	Se.	Se.	Se.
Para. die.	m											ton9	ton9	ton9	tonus
Nete die.	n												ton9	ton9	tonus
Trite hyper.	o													Se.	Se.
Para. hyp.	p														tonus
Nete hyp.	q														

Prima species diatessaron tono / semitonio minore atq; tono constat. Secūda semitonio et duob9 tonis. Tertia duobus tonis et sequēte semitonio. Prima species diapēte est que constat ex tono / semitonio minore ⁊ duobus tonis. Secūda duobus tonis / semitonio / atq; tono. Tertia semitonio et tribus tonis. Quarta tribus tonis et semitonio. Prima species diapason est que constat ex tono / semitonio minore / duobus tonis / semitonio minore / atq; duobus tonis. Secunda semitonio / duobus tonis / semitonio et tribus tonis. Tertia duob9 tonis / semitonio / trib9 tonis / atq; semitonio. Quarta tono / semitonio / tribus tonis / semitonio / atq; tono. Quinta semitonio / tribus tonis / semitonio / duobus tonis. Sexta tribus tonis / semitonio / duobus tonis / semitonio. Septima duobus tonis / semitonio / duobus tonis / semitonio / atq; tono. Erit itaq; p diffinitionē prima diatessarō spēs a proslābanomeno in lichanō hypaton. Nā proslābanomenos ad hypaten hypatō tonus est: et hypate hypaton ad parhypatē hypaton semitoniū minus ē: parhypate vero hypatō ad lichanō hypaton tonus. ⁊ itidē per diffinitionē secūda diatessaron species ab hypate hypaton in hypaten meson reperiet. ⁊ tertia a parhypate hypaton in parhypaten meson. Species vero diapente hoc pacto per diffinitiones sumentur. Prima a proslābanomeno in hypaten meson. Secunda a parhypate hypaten in lichanon meson. Tertia ab hypate meson in paramesen diezeugmenon. Et quarta a parhypate meson in triten diezeugmenon. Et septē species diapason cōsimiliter per diffinitiones querentur. Prima a proslābanomeno in mesen. Secūda a parhypate hypaton in paramesen diezeugmenō. Tertia a parhypate hypaton in triten diezeugmenon. Quarta a lichano hypaton in paranetē diezeugmenō. Quinta ab hypate meson in neten diezeugmenō. Sexta a parhypate meson in triten hyperboleō. Septima vero a lichano meson in paranetē hyperboleō. sz hec cognitu facilia sunt: inspecta diligēter supiore figura.

¶ Chromaticum principalium tetrachordum: constituere. 10

Proslambanomenos	A		A
Hypate hypaton	b	Tonus	b
Parhypate hypaton	c	Semi.minus	c
Lichanos hypaton	d	Apotome	d
Hypate meson	e	Trisemitonium	e

¶ Chromata apud Lachedemonios induxit olim Timotheus milesius moliorē cātum superiore diatonico: in quo canendi modo hic tetrachordū hypaton querimus. Sit ergo b c d e tetrachordū ad hypatas in chromatico melo ꝯstituendas assignatū. prepono chordam a: que sit proslābanomenos: quā facio sesquioctauam ad b hypaten hypaton primam tetrachordi cōstituendi chordam: deinde facio a sesqualterā ad e hypaten meson: eritq; vt in omnibus a ad b tonus/ et a ad e diapente. deinde facio b ad c semitoniū minus et b ad d tonum. erit ergo c ad d apotome. ⁊ q2 per decimā tertij dēpto a b tono ab a e cōsonantia diapente: relinquitur diatessaron. ergo b e modulabitur diatessaron. Sed cum per sextā tertij diatessaron ex duobus tonis et semitonio minore constet ⁊ b c et c d simul sint tonus: ergo d e continet tonum et semitoniū minus. est igitur d e trisemitoniū. Cum ergo b c hypate hypaton et parhypate hypaton sit semitoniū minus. ⁊ c d parhypate hypaton ⁊ lichanos hypaton sit semitoniū maius et d e lichanos hypaton ⁊ hypate meson trisemitoniū vt mōstratum est. constat ergo p diffinitionē tetrachordū b c d e in gñe chromatico eē ꝯstitutū. idē enī trisemitoniū et trihemitoniū dicim⁹.

¶ Chromaticum tetrachordum meson: subiungere. 11

Proslambanomenos	A		A
Hypate hypaton	b	Tonus	b
Parhypate hypaton	c	Semi.minus	c
Lichanos hypaton	d	Apotome	d
Hypate meson	e	Trisemitoniū	e
Parhypate meson	f	Semi.minus	f
Lichanos meson	g	Apotome	g
Mese	h	Trisemitoniū	h

¶ Sint pro tetrachordo meson in gñe chromatico ꝯstituēdo e f g h: facio a ad h duplā et concinētem diapason. ⁊ e ad f semitoniū minus ⁊ idē e ad g facio tonū. erit ꝙ f ad g apotome. sed cū a ad e mōstrata sit ꝯsonātia diapēte. ea igitur substracta ab a h cōsonātia diapason: per vicesimāsecundā tertij relinquitur diatessarō. Est ergo e ad h hypate meson ad mesen diatessaron. ⁊ cum diatessaron duos tonos et semitoniū minus ipleat: ⁊ e g sit tonus ergo g h cōtinet tonum et semitoniū minus. erit ergo g h trisemitoniū. erit igitur e f g h ex duobus semitoniis e f ⁊ f g: et trisemitonio g h constitutum in genere chromatico tetrachordum. quod erat monstrādum.

¶ Reliqua duo tetrachorda: in eodem genere predictis adiicere. et in pētadecachordo consonantiam bis diapason collocare. 12

Proslambanomenos	A			A
Hypate hypaton	b	Tonus		b
Parhypate hypaton	c	Semi.min⁹		c
Lichanos hypaton	d	Apotome		d
Hypate meson	e	Trisemitoniū		e
Parhypate meson	f	Semi.minus		f
Lichanos meson	g	Apotome		g
Mese	h	Trisemitoniū		h
Paramese diezeugmenon	k	Tonus	Trite syn. Semi.minus	k
Trite diezeugmenon	l	Semi.mi.	Paranete syn. Apotome	l
Paranete diezeugmenon	m	Apotome	Nete syn. Trisemitoniū	m
Nete diezeugmenon	n	Trisemitoniū		n
Trite hyperboleon	o	Semi.minus		o
Paranete hyperboleon	p	Apotome		p
Nete hyperboleon	q	Trisemitoniū		q

¶ Sint pro reliquis tetrachordis complendis lꝛ l m n o p q: qꝛ tetrachordum meson disiunctum est a tetrachordo netarum diezeugmenon: iccirco facio meses ad paramesen diezeugmenon distantiã esse tonum. et mesen ad neten diezeugmenon facio consonare diapente. ⁊ ad netē hyperboleon diapason et tetrachordū lꝛ l m n partior vt tetrachordū hypaton. tetrachordum vero n o p q partior vt in precedenti tetrachordū meson eritqꝫ vtrūqꝫ in genere chromatico diuisum. et qꝛ a ad h cognita est esse diapason: et h ad q itidem diapason. ergo a ad q consonat bis diapason. Qñ cum quindecim vocibus atqꝫ chordis contētum sit: constat effectū esse id quod erat propositū. Sed si lꝛ l m facis tetrachordū synezeugmenon ipsum partiaris vt tetrachordū chromaticum meson. et facile factū intuebere ꝓpositū.

15 ¶ Chromatici pentadecachordi numeros assignare.

Proslambanomenos	A		2592	5971968	
Hypate hypaton	b	256	2304	5308416	Tonus
Parhypate hypaton	c	243	2187	5038848	Semi. minus
Lichanos hypaton	d		2048	4718592	Semi. maius
Hypate meson	e		1728	3981312	Trisemitoniū
Parhypate meson	f			3779136	Semi. minus
Lichanos meson	g			3538944	Semi. maius
Mese	h		1296	2985984	Trisemitoniū
Paramese diezeugmenō	lꝛ		1152	2654208	Tonus
Trite diezeugmenon	l			2519424	Semi. minus
Paranete diezeugmenō	m			2359296	Semi. maius
Nete diezeugmenon	n		964	2221056	Trisemitoniū
Trite hyperboleon	o			2108268	Semi. minus
Paranete hyperboleon	p			1974272	Semi. maius
Nete hyperboleon	q		648	1492992	Trisemitoniū

¶ Sint b et c minimi numeri semitonij minoris per decimãoctauam secūdi huius reperti. qꝛ b nona parte caret: augeo b et c per nouem et veniãt b et c in secundo loco. quoniã igitur in secundo loco b nonam partē habet: eam augeo per octo et fiat d. tunc b ad d per septimã secundi arithmetices erit sesq octauus. quare b d cōtinentia tonum. et b ⁊ c per eãdem est semitonium minus. ergo c d est apotome. Rursum qꝛ b habet octauã adiicio eidem suam octauã ⁊ fiat a: eritqꝫ a ad b sesquioctauus atqꝫ tonus et quoniã a habet tertiam facio a ad e sesqualterū. ⁊ qꝛ habet secūdam facio itidem a duplum ad h. Reperio item h habere nonam, tertiã et secūdam. facio igitur h sesquioctauū ad lꝛ: sesqualterū ad n ⁊ duplū ad q. quo facto duco b secundi loci in a b c d e h lꝛ n q et veniant in tertio loco a b c d e h lꝛ n q. Deinde duco c d secundi loci in e secundi et veniant f g ⁊ in lꝛ et veniant l m et in n ⁊ veniant o p in tertio loco. eruntqꝫ per septimã et octauam secundi arithmetices numeri pētadecachordi chromatici in tertio loco assignati. Nam a b erit tonus et b c semitoniū minus ⁊ c d apotome. et qꝛ a ad e est sesqualter: a et e sunt numeri diapente. ⁊ a b numeri toni. dempto igitur a b tono relinquitur b e diatessaron et b c ⁊ c d simul sunt tonus. igitur per sextam tertij d e sunt trisemitoniū. Et a h est diapason ⁊ a e diapente. igitur e h est diatessaron. et per octauam secundi arithmetices e f ⁊ f g sunt semitoniū minus ⁊ apotome. igitur g h est trisemitonium et cōsimiliter monstrabis h lꝛ esse tonū lꝛ l ⁊ l m duo semitonia et m n trisemitoniū n o p duo semitonia ⁊ p q trisemitoniū. clarum igitur euadit propositum.

14 ¶ Modorum diatonici et chromatis parhypate parhypatis: paramese paramesis/ atqꝫ trite tritis correspondent.

¶ Nam in vtrisqꝫ generibus hypate ad parhypatas semitonij minoris obseruãt interuallū. et mese ad paramesas tonum. ⁊ trite ad tritas minus semitoniū. est igitur notum illas voculas in vtroqꝫ canendi modo sibiinuicē respōdere. ⁊ nō modo id verum sit: sed et hypate hypatis ⁊ mese mesis et nete netis correspōdent. Nam vtrobiqꝫ proslãbamenoni ad hypatas hypaton cōcinunt tonum. et ad hypatas meson diapente. ad mesas diapason. ad netas disiūctarum diapason ac diapente. ⁊ ad netas hyperboleon bis diapason. est ergo quod ꝓponebatur et amplius: facile cognitū.

¶ Pentadecachordum enarmonium constituere. 15

Proslambanomenos	A			A
Hypate hypaton	b	Tonus		b
Parhypate hypaton	c	diesis		c
Lichanos hypaton	d	diesis		d
Hypate meson	e	ditonus		e
Parhypate meson	f	diesis		f
Lichanos meson	g	diesis		g
Mese	h	ditonus		h
Paramese diezeugmenon	k	tonus	Trite syn. diesis	k
Trite diezeugmenon	l	diesis	Paranete syn. diesis	l
Paranete diezeugmenon	m	diesis	Nete syn. ditonus	m
Nete diezeugmenon	n	ditonus		n
Trite hyperboleon	o	diesis		o
Paranete hyperboleon	p	diesis		p
Nete hyperboleon	q	ditonus		q

¶ Huius cõpositio perfacilis est. facio enĩ vt in ceteris precedẽtibus a ad b interuallũ toni. et a ad e diapẽte. et b ad d facio semitoniũ minus. et diuido chordã c in medio differẽtie b ad d erit ergo b ad c diesis tetrartemeria atque quadripartialis pariter et c ad d diesis. sed per quartam secundi huius hec latior illa vero contractior neque per tricesimãsecundam eiusdem semitoniũ minus in duo equa certo constitutoque numero diuidi potest. et a ad e diapente. substracto igitur a b tono relinquitur b ad e esse diatessaron. et cum diatessaron semitoniũ minus et duos tonos cõplectatur: et b ad d sit semitonium minus: relinquitur igitur d ad e esse ditonus. erit igitur b c d e hypates hypaton parhypates hypaton lichanique hypatõ et hypates meson tetrachordũ: per b c: c d: et d c diesim et diesim et ditonũ procedẽs ꝓ diffinitionẽ in enarmonico gñe diuisum. Similiter cõstituas e f g h tetrachordũ meson faciẽdo a ad h diapason. et e ad g semitoniũ minus. et partiẽdo mediã driam per f itavt e f et f g sint due dieses Nã ab a h cõsonantia diapason subducta a e cõsonantia diapẽte: relinquitur e h esse diatessarõ. et cũ e g sit semitoniũ min⁹: igitur g h erit ditonus. et cũ e f et f g sint due dieses et g h diton⁹. ꝗ hec tetrachordi partitio in genere enarmonico facta cõspicitur. Et facta h mese ad netẽ disiunctarum diapente: et ad neten hyperboleon diapason: et chorda mese a paramese tetrachordi disiunctarũ tono disclusa: perinde ac proslãbanomeno ab hypate hypaton: partieris tetrachordum disiunctarũ k l m n vt b c d e tetrachordũ hypaton. et tetrachordum n o p q hyperboleon excellentiũque: vt e f g h tetrachordũ meson. tetrachordũ autem cõiunctarum h k l m partieris vt tetrachordũ meson et id quoque facile est.

¶ Pentadecachordi enarmonici: numeros colligere. 16

Proslambanomenos	A	13824		13824	
Hypate hypaton	b	12288	Tonus	12288	Tonus
Parhypate hypaton	c	11664	Semi mi.	11976	diesis
Lichanos hypaton	d	10368	Tonus	11664	diesis
Hypate meson	e	9216	Tonus	9216	ditonus
Parhypate meson	f	8748	Semi mi.	8982	diesis
Lichanos meson	g	7776	Tonus	8748	diesis
Mese	h	6912	Tonus	6912	ditonus
Paramese diezeugmenon	k	6144	Tonus	6144	Tonus
Trite diezeugmenon	l	5832	Semi mi.	5988	diesis
Paranete diezeugmenon	m	5184	Tonus	5832	diesis
Nete dizeugmenon	n	4608	Tonus	4608	ditonus
Trite hyperboleon	o	4374	Semi mi.	4491	diesis
Paranete hyperboleon	p	3888	Tonus	4374	diesis
Nete hyperboleon	q	3456	Tonus	3456	ditonus

¶ Sint numeri a b c d e f g h k l m n o p q in pꝛimo loco conſtituti numeri pẽtadecachoꝛdi diatonici per octauam huius reperti. pono iterum a b e h k n q in ſecũdo loco ⁊ in reſpõdentibus locis rurſum c in ſecundo loco tranſmuto ad d et f ad g ⁊ l ad m et o ad p. quibus ita in ſecundo loco diſpoſitis: ex ipſis quidem in ſecundo loco capio differentiam b d ⁊ eius medietatem adiicio ad d et fiat c. ſimiliter differentiã e g et medietatem addo ad g ⁊ fiat f. et differẽtiam k m ⁊ medietate differentie adiecta ad m fiat l. et differentiam n p ⁊ medietate adiecta ad p fiat o. dico a b c d e f g h k l m n o p q numeros ſecundo loco poſitos eſſe numeros pentadecachoꝛdi enarmonici. Nam a b erit tonus. b c | et c d due dieſes cõſtituentes ſemitoniũ minus b d. quod enĩ eſt b c in diatonico factum eſt b d in enarmonico et d e eſt ditonus. Nam quod eſt in diatonico c e eſt hic in enarmonico d e. at diatonice modulationis c e ditonus eſt. Nam cõtinens c d tonũ et d e tonum. ⁊ hoc pacto reperiẽtur e f g due dieſes ⁊ g h diton⁹. h k tonus: k l m due dieſes: m n ditonus. n o p due dieſes: p q ditonus Sunt itaqꝫ collecti numeri pentadecachoꝛdi enarmonici quẽadmodum pꝛopoſitum fuerat. quod eſt pꝛopoſitum.

17 ¶ Modi diatonici parhypate hypaton: in enarmonica modulatione tranſit in lichanon: et parhypate meſon in lichanon meſon atqꝫ trite in paranetas.

¶ Id pꝛoſpici ſtatim pꝛomptũ eſt. Nam in diatonico pẽtadecachoꝛdo a pꝛoſlãbanomeno ad hypatẽ hypaton incidit tonus. et ab hypate ad parhypaten hypaton ſemitoniũ minus. in enarmonico vero a pꝛoſlãbanomeno ad hypaten hypaton ſimiliter incidit tonus. et ab hypate ad lichanon hypaton ſemitoniũ minus. diatonica igitur parhypate: in enarmonica modulatione permutatur: tranſitqꝫ in lichanon. et hoc pacto de reliquis oſtẽdatur. quod ⁊ facile ſenſu depꝛehẽdetur: ſi in vtroqꝫ e modulãdi genere ⁊ diatonico et enarmonico pꝛoſlãbanomeni ponantur equiſoni. tunc enĩ manifeſtũ erit huius lichanos: illius parhypatis eſſe equiſonos: vniſonoſqꝫ: pariter et huius paranetas: illius tritis eſſe equiſonas.

18 ¶ Conſentiunt in tribus modulationũ generibus: pꝛoſlambanomeni/ hypate principales/ hypate medie/ meſe/ parameſe/ nete/ cum diſiuncte/ tum coniuncte/ atqꝫ excellẽtibus netis excellentes.

¶ Nam in tribus generibus per quartã/ quintam/ ſextam/ ſeptimã/ decimam/ vndecimã/ duodecimã et quintãdecimam huius pꝛoſlãbanomeni ad hypatas hypaton ſonant tonum. et iidem ad hypatas meſon ſonant diapente. ad meſas diapaſon. ad netas diſiũctas ſonant diapaſon ac diapẽte. ad netas autem cõiunctas dempto tono ſonarent diapaſon ac diateſſaron. et ad netas excellẽtes: cõſonant vbilibet pꝛoſlambanomeni bis diapaſon. cõſentiunt igitur in tribus generibus que adducte ſunt vocule. quod eſt pꝛopoſitum

19 ¶ Que choꝛde mobiles queue imobiles in pẽtadecachoꝛdis exiſtant: inueſtigare.

Pꝛoſlambanomeni	A	Stabiles	
Hypate hypaton	b	Stabiles	
Parhypate hypaton	c	Inſtabiles	
Lichani hypaton	d	Inſtabiles	
Hypate meſon	e	Stabiles	
Parhypate meſon	f	Inſtabiles	
Lichani meſon	g	Inſtabiles	
Meſe	h	Stabiles	
Parameſe diezeugmenon	k	Stabiles	Trite ſynezeugmenon. Inſtabiles
Trite diezeugmenon	l	Inſtabiles	Paranete ſynezeugmenon. Inſtabiles
Paranete diezeugmenon	m	Inſtabiles	Nete ſynezeugmenõ. Stabiles
Nete diezeugmenon	n	Stabiles	
Trite hyperboleon	o	Inſtabiles	
Paranete hyperboleon	p	Inſtabiles	
Nete hyperboleon	q	Stabiles	

¶ Choꝛdas ſtabiles imobileſqꝫ vocamus: que in omni pentadecachoꝛdoꝛũ diuiſione: eadem ſeruant interualla: eandẽqꝫ ad pꝛoſlãbanomenon habitudinem. Inſtabiles vero atqꝫ mobiles: que id nõ ſeruant. ſic ergo ſtabiles ac inſtabiles reperiemus. cum enim per pꝛecedentem in tribus generibus conſentiant pꝛoſlãbanomeni: pꝛĩcipales hypate: medie hypate: meſe: parameſe: nete tum ſynezeugmene tum diezeugmene ac hyperboles: et eadem vt ex demonſtratis iam patet ſeruent interualla. erunt ergo pꝛoſlambanomenos hypate hypaton: hypate meſon: meſe: parameſe nete ſynezeugmenon: nete diezeugmenon: et nete hyperboleon: ſimpliciter immobiles atqꝫ firme. Sed cum decimaſeptima huius monſtrauerit parhypatas diatonice modulationis: in enarmonico melo tranſire

permutariq; in lichanas| ⁊ tritas in paranetas: constat ergo reliquas a predictis esse mobiles: vt parhypaten hypaton |lichanon hypaton |parhypaten meson|lichanon meson| triten synezeugmenon| paranetē synezeugmenon| triten diezeugmenō|paranetē diezeugmenon|triten hyperboleon|paranetē hyperboleō. Id tamen animaduerti dignū est ꝙ cum per decimāquartam huius parhypate| ⁊ trite in diatonicis et chromaticis respōdeant|similiaq; possideāt interualla: eas nō vsq; adeo(vt cetere sunt) esse instabiles. Et proinde parti mobiles|partimq; imobiles bono iure dici posse videntur.

¶ In tetrachordis diatonicis ab hypate hypaton primo limite consonantiarum: ad quartum vsq; limitem ter diatessaron cōtinetur sed semel dumtaxat in stabilibus/immobilibusq;. Et ad quintū limitem idētidem ter diapente: semel in mobilibus/semel partim variabilis/et semel penitus inuariabilis atq; firma. ad octauum vero septies consonabit diapason: ter in imobilibus/et quater in mobilibus. 20

Hypate hyp|et consequentes suis locis.														
		Semi	Ton⁹	Ton⁹	Semi	Ton⁹	Ton⁹	Ton⁹	Semi	Ton⁹	Ton⁹	Semi	Ton⁹	Ton⁹
Stabiles	b	|	|	e	|	|	h	i	|	|	m	|	|	p
Instabiles		c	d		f	g			k	l		n	o	

¶ Cum dicitur a primo limite ad quartū vsq; limitē/quintū|ac octauum: primus limes nō excludit: sed quartū/quintū/ac octauū excludi itelligimus. Sint ergo b c d e f vsq; ad p quattuor tetrachorda et b hypate hypaton/ceterevero cōsequētes. Dico primo ab b vsq; e ter cōtineri diatessaron: sed semel solū in imobilibus. Nam per quartā huius b ad c continet semitoniū minus et c ad d tonum et d ad e tonū. ergo b ad e cōsonat diatessaron: eritq; b ad e prima diatessaron cōsonantia reperta. Et cum ostē sum sit c ad d et d ad e esse duos tonos et per quintā huius e ad f sit semitoniū minus: ergo c ad f consonat diatessaron. eritq; c ad f secūda diatessaron. Item mōstratus est d ad e esse tonus et e ad f semitoniū minus: et per quintā huius f ad g est tonus. ergo d ad g est diatessaron/eritq; d ad g tertia diatessaron. Sed cū prima harū trium que est b ad e sit ab hypate hypaton ad hypaten meson: quas mōstrauit precedēs stabiles imobilesq;: et secunda ab c in f prahypate hypaton in parhypaten meson: et tertia ab d in g lichano hypaton in lichanon meson. et parhipate ⁊ lichane monstrate sunt mobiles. constat ergo ab b ad e ter diatessaron sed semel dūtaxat in stabilibus/imobilibusq; cōtineri. ¶ Scdo dico ab b hypate hypaton ad f vsq; parhypaten meson: solū ter contineri diapente. Nam per decimā tertij diapente tribus tonis semitonioq; minore constat. sed per quartā ⁊ quintā huius b ad f solum duos tonos ⁊ duo semitonia minora ꝯtinet: q̄ duo semitonia miora p 34 scdi minus vno tono: cōmate restituūt. ꝗ vt b ad f diapente cōsonantiā ꝯpleat: plena deest apotome. nō ꝯstituit ergo b ad f diapēte. Itē c ad g per quartā et quintā huius cōtinet tres tonos qui sunt c ad d: d ad e: ⁊ f ad g: et vnum semitoniū minus quod est e ad f. igitur per decimā tertij e ad f ꝯsonat diapēte. eritq; c ad g prima diapēte et per easdem d ad h continet tres tonos: qui sunt d ad e: f ad g: et g ad h: ⁊ semitonium minus e ad f. ergo d ad h cōsonat diapente: eritq; d ad h secūda diapente. ⁊ ab e ad i per quartā et sextā cōsimiliter continētur tres toni et semitoniū minus. erit ergo e ad i tertia diapēte. ter igitur ab b vsq; ad f continetur diapēte. sed cū prima sit ab c parhypate hypatō in g lichanō meson. et parhypatas ⁊ lichanas mōstrauerit decimanona huius esse mobiles. erit ergo c ad g prima diapēte in mobilibus constituta. ⁊ cum secunda sit ab d lichano principaliū in h mesen: lichanos autē mobilis sit/et mese imobilis: secunda igitur diapēte partim variabilis existit. Et cū tertia sit ab e hypate meson ad i paramesen que per eandē decimānonam stabiles mōstrate sunt. erit igitur tertia diapēte omnino stabilis atq; firma ¶ Tertio dico ab b hypate hypaton vsq; ad i paramesen septies cōtineri diapason: sed solū ter in imobilibus|quater autē in mobilibus. Nam b ad i per quatrā/quintā et sextam huius cōtinet quinq; tonos et duo semitonia minora. ergo per vicesimāprimā tertij b ad i cōsonat diapason|eritq; b ad i pma diapason. Et per idē c ad k: d ad l ⁊ e ad m: singule intercipiūt quinq; tonos et duo semitonia minora erit ergo c ad k secūda diapason. et d ad l tertia. ⁊ e ad m quarta. sed per quartam|quintā|sextam atq; septimā simul f ad n similiter continebit quinq; tonos ⁊ duo semitonia minora. similiter et g ad o ⁊ h ad p. erit ergo quita diapason f ad n. sexta g ad o. et septima h ad p. igitur ab b ad i vsq;: cōtinetur septies diapason. atqui primam prebent hypate hypaton ⁊ paramese diezeugmenō. et quartam hypate meson ⁊ nete diezeugmenō. et septimā mese ⁊ nete hyperboleō. hypatas autem mesas paramesas et netas mōstrauit decimaoctaua imobiles atq; stabiles. igitur inter illas septē diapason cōsonantias: diapason ter in imobilibus reperit. Sed secūdam prebent parhypate hypaton et trite diezeugmenō Tertiā lichanos hypaton et paranete diezeugmenō. Quintam parhypate meson ⁊ trite hyperboleō Sextā licanos meson et paranete hyperboleon sed decimanona parhypatas|tritas| lichanas ⁊ paranetas: mōstrauit esse mobiles. igitur inter illas septem cōsonantie diapason vices: quater in mobilib⁹ mutabilibusq; facta reperitur: quod est totum propositum. ¶ Qui autem diuus Seuerinus sapientū latinorū disciplinas sectantiū primus: quē ⁊ in hoc opere quātum valem⁹ imitamur suis disciplinis nō parum adiuti decimotertio capite quarti sue musices species diapēte numerādo eas quattuor faciat: id introductorie factum putetur: vbi precisam nō curauit veritatē. sed cōmunem secutus illic est extimationē. quod facile ex eius superiori determinatione cognoscitur. hic autem nō introductionis sed exacte determinationis locus est.

21 ¶ Tessaradecachordi chromatici inter assignatos limites ter itidē diatessaron: solū semel immobiliter. bis diapēte: semel immobiliter/ semelq; partim mobiliter. septies aūt diapason: ter vt in diatonico gñe immobiliter/ quaterq; mobiliter cōtinet̄.

Semi.	Apo.	Trise.	Semi.	Apo.	Trise	Tonus	Semi.	Apo.	Trise.	Semi.	Apo.	Trise.

b | | e | | h i | | m | | p

c d f g k l n o

¶ Tessaradecachordum ex quattuor tetrachordis cōstituit̄: iccirco sic nūcupatnm: q; quattuordecim chordis/ neruis/ voculisue cōtineatur. dico enī primo quattuordecim chordarū in genere chromatico cōtinue per litteras b|c|d|e|f|g|h|i|k|l|m|n|o|p| ab hypate hypaton dispositarū a primo ad quartum vsq; limitem: ter cōtineri diatessaron solū semel immobiliter. Nā per decimam b ad e cōcinit diatessaron. eritq; b ad e pma diatessaron. sed q quia per decimam c ad d est apotome et d ad e trisemitoniū: ergo c ad e cōtinet duos tonos. et per vndecimā e ad f est semitoniū. ergo per sextam tertij c ad f duos tonos et semitoniū cōtinens: erit diatessaron. erit igitur c ad f secūda diatessaron. et quia rursus per vndecimam e ad f est semitonium minus et f ad g apotome: ergo e ad g tonus. sed d ad e monstratum est trisemitoniū. ergo d ad g ꝯtinet duos tonos q semitoniū: estq; d ad g tertia diatessaron. Et cū pma b ad e sit ab hypate hypaton in hypaten meson per decimāoctauā fit īmobilit̄. secūda vero c f/ et tertia d g: sunt a parhypate q lichano principalium: q̄ decimanona patefecit esse mobiles. cōstat ergo pmū. ¶ Scdo dico solū bis intra quintū limitem cōtineri diapente. quia enī b ad e per īmediate mōstratū est diatessaron. et e ad f/ et f ad g simul tonus. ergo p decimātertiā tertij b ad g cōcinit diapente. eritq; b ad g prima diapente. ea tñ sex vocibus q non quinq; explebit̄: proprietatem diapente nō seruans. at c ad g non explebit diapente. Nā per modo mōstratū ad diapēte cōplementū deerit b ad c semitoniū minus. neq; c ad h. Nā per vndecimam huius g ad h cōtinet trisemitoniū. at c g ad diapente cōplemētum solū deerat semitonium minus: superat igitur c h consonātiaʒ diapente completo tono. neq; d h cōtinet diapente. Nam cū c h superet consonātiam diapente integro/ cōpletoq; tono: dempta ergo c d apotome relinquet̄ d h superās diapente cōsonātiam semitonio minore. sed e ad i cōsonat diapēte: est enī h ad i per duodecimam tonus. sed d ad h per īmediate mōstratum superat consonātiam diapente semitonio minore. dēpto ergo d e trisemitonio minore: relinqtur e h deficiens tono a diapēte: addito igitur h i tono fiet diapente. est itaq; e ad i secūda diapēte. Ab b igitur ad f quintū limitem solum bis sumitur diapēte. Et cū prima diapente b g sit ab hypate hypaton īmobili ad lichanon meson partim mobilem: fit ergo primo partim mobiliter. At vero cū secūda e i sit ab hypate meson ad paramesen que mōstrate sunt immobiles: fit ergo secūdo modo immobiliter seruat̄q; secūdo modo diapēte propetas vt de quinto loco in quintum fiat locum. ¶ Tertio dico septies fieri diapason ter īmobiliter/ quater vero mobiliter. Nam cū b ad e per primam partem huius monstrata sit diatessaron: et per scdam e ad i diapente. ergo per vicesimā tertij b ad i cōsonat diapason. erit itaq; b ad i prima diapason. Preterea quia c ad f fuit inuēta secunda diatessaron: et f g est apotome g h trisemitoniū: ergo f h duo sunt toni et h i tonus et i k semitoniū. ergo f k diapēte: et c f vt iā dictū est diatessaron. cōcinit igitur c ad k diapason: eritq; c k secunda diapason. et eodē iure d l tertia diapason adiuuāte duodecima huius. et e m quarta. f n quinta. g o sexta. et h p septima. Sed ter fieri immobiliter et quater mobiliter eodē modo vt in vicesima monstratur.

22 ¶ In tetradecachordo enarmonico: inter assignatos limites ter diatessaron q septies diapason vt in precedētibus continetur. at semel dūtaxat diapente atq; immobiliter.

Die.	Die.	Dito.	Die.	Die.	Dito.	Tonus	Die.	Die.	Dito.	Die.	Die.	Dito.

b | | e | | h i | | m | | p

c d f g k l n o

¶ Tetradecachordum q tessaradecachordum idē dicimus. sit igit̄ b/c/d/e/f/g/h/i/k/l/m/n/o/p tessaradecachordū enarmonicū. dico pmo inter b e ter cōtineri diatessaron. Nā quia per decimāquītam huius b c d sūt due dieses tetrartemerie: erit b d semitoniū minus. et d e est ditonus. erit igit̄ b e pma diatessaron. et eodem iure c f secūda. et d g tertia. et quia b e sunt hypate hypaton q hypate meson: fit igitur prima immobiliter. et c d sunt parhypate hypaton q lichanos hypaton mobiles: fit igit̄ et duobus modis mobiliter. ¶ Scdo dico solū semel a primo ad quintum limitem fieri diapente: et id quidē immobiliter. nam non fiet diapente b f quia solā supaddit consonātie diatessaron b e diesim tetrartemeriam. neq; b g quia solū supaddit consonantie diatessaron duas dieses que sunt semitoniū minus. neq; fiet b h quia cōsonātie diatessaron supaddit semitonium minus q duos tonos. neq; per idem fiet diapente c g aut c h. nam hic abundabit tonus q diesis: illic aūt deerit tonus minꝰ vna diesi. neq; d g. nam deerit tonus. neq; d h. nam tonus abundabit. at vero cū e h sit diatessaron: nā e f g due dieses/ q g h ditonus/ et cū h i sit tonus: erit igitur e i diapēte. et cū e sit hypate meson et i paramese q̄ monstrate sunt immobiles. fit igitur inter assignatos limites solū semel diapēte atq; immobilit̄. Tertio septies fieri diapason vt in diatonicis ex decimaquinta declarat̄ quēadmodum vicesima huius mōstrata est.

23 ¶ Diatonice modulationis: septem modos ordine collocare.

	Modus	Intervallum	a b c d e f g h i k l m n o p	
R	Hypodorius			p 7 dia
S	Hypophrygi⁹	Tonus		p to
T	Hypolydius	Semito.	A	p nt
V	Dorius	Tonus	A	p ct
X	Phrygius	Tonus	A	p mo
Y	Lydius	Semitonium	A	dt
Z	Myxolydius	Tonus	A	

A b c d e f g h i k l m n o p

¶ Sit a b c d vsq; ad p pentadecachordum diatonicum. sit r ꝑ hypodorio pentadecachordum diatonicum a b c d e f g h i k l m n o p grauissimũ: qd vt aliorꝫ basis atq; fundamẽtum statuatur: extendo vno tono in acumen proslambanomenon pentadecachordi s amplius ꝙ sit proslambanomenos r ad quem ceteras voces suo ordine per quartã/quintã ⁊ sextam huius in diatonico modulãdi genere subiũgo. eritq; pentadecachordum s per diffinitionem hypophrygij modi. similiter extẽdo proslambanomenon pentadecachordi t semitonio ãplius ꝙ tensus sit proslãbanomenos pẽtadecachordi s cui tetrachorda per quartã/quintã/⁊ sextam huius vt prius coapto. eritq; per diffinitiõem t pentadecachordũ hypolydij modi. et proslãbanomenon v vno tono extẽdo amplius ꝙ hypolydij: cui ceteras voces suo ordine sequẽtes in diatonico genere coapto. eritq; cõcentus pẽtadecachordi v per diffinitionem dorius. et si amplius extẽdo x vno tono: erit pentadecachordi x cantus phrygius. et si y semitonio miore: erit eius concẽtus lydius. At z amplius extenso vno tono: fiet concentus myxolydius. sicq; factũ ꝑ diffinitiões patebit propositum.

¶ Que diuersorũ modorum in aliquo genere fuerit ṗme vocis ad primã habitudo: ea erit secunde ad secundam et tertie ad tertiam et cuiuslibet totius ad totam similis/ eademq; habitudo. 24

	Modus	a b c d e f g h i k l m n o p
R	Hypodorius	
S	Hypophrygius	

q r s t v x A b c d e f g h i

¶ Sit a/b/c/d ad p vsq; pentadecachordum hypodoriũ in aliquo gñe vt diatonico: et q/r/s ⁊ sequẽtes pentadecachordũ hypophrygiũ. distabitq; iccirco q proslambanomenos hypophrygij ab a proslãbanomeno hypodorij modi acutior vno tono. dico ergo singulas hypophrygij: singulis hypodorij vt hypatas hypatis/parhypatas parhypatis/lichanas lichanis et ita cõsequẽtes: similiter tono/ toniq; proportione distare. Nam cũ pentadecachordum a p et pentadecachordum q g sint vtraq; a proslãbanomeno in neten hyperboleon diatonice extẽsa: ergo que ꝓportio a ad b ea est per quartã huius q ad r: ergo per tertiam secundi Arithmetices permutatim vt a ad q ita b ad r. at a ad q mõstratus est esse tonus: igitur et b ad r tonus. et cõsimiliter de sequentibus ostendatur.

¶ Totus ordo diatonicus pẽtadecachordi hypophrygij modi: totum hypodorium vnius acumine toni superat: et totus hypolydius eũdem trisemitonio. singule quoq; dorij singulas hypodorij diatessaron consonantia. totus vero phrygius consonantia diapente. lydius aũt diapẽte atq; semitonio. et myxolydius diapẽte atq; sesquitono. 25

	Modus	Intervallum	a b c d e f g h i k l m n o p	
R	Hypodorius			p 7 dia
S	Hypophrygi⁹	Tonus		p to
T	Hypolydius	Semito.	A	p nt
V	Dorius	Tonus	A	p ct
X	Phrygius	Tonus	A	p mo
Y	Lydius	Semitonium	A	dt.
Z	Myxolydius	Tonus	A	

A b c d e f g h i k l m n o p

¶ Nã proslambanomenos hypophrygij tono superat acumine proslambanomenon hypodorij. ergo per precedẽtem totus hypophrygius ordo totũ hypodorium ordinem: toni superat acumine. et quia proslambanomenos hypolydij superat acumine semitonij minoris hypophrygiũ: ergo idem superat acumine proslambanomenon hypodoriũ trisemitonio. igitur per precedẽtem totus hypolydius ordo totũ hypodoriũ ordinẽ trisemitonio supeuadit acutior. sed ⁊ q2. dorius toni acutie vincit hypolydiũ: ergo dorius duobus tonis ⁊ semitonio acutior est hypodorio. ergo per sextã tertij eo acutior est cõso=

nantia diatessaron.quare per precedentem singule doriĳ singulis hypodoriĳ diatessaron consonantia sonant acutiores.et phrygius addit tonum in acumine dorio:igitur totus phrygius toto hypodorio diapente cõsonãtia modulatur acutior.et lydius phrygio addit semitoniũ min⁹ et myxolydius lydio tonum.igitur lydius hypodorio diapente ⁊ semitonio ⁊ myxolydius diapente et sesquitono sonabit acutior.quod totum est propositum.

26 ¶ Hypolydius diatonicus hypophrygium diatonicum semitonio/⁊ dorius trisemitonio/phrygius diatessaron/lydius diatessaron ⁊ semitonio/myxolydius diatessaron consonãtia/atq₃ sesquitono supereuadit acutior:⁊ dorius hypolydio tono/phrygius ditono/lydius diatessaron ⁊ myxolydius diapente:phrygius autem ad dorium sonat tonum lydius trisemitonium ⁊ myxolydius diatessaron/lydius phrygio semitonium et myxolydius sesquitonum:myxolydius autem lydio tonum.

¶ Hec vt precedens vel ꝙ facillime monstrabitur.

27 ¶ Septem modos chromatice modulationis constituere.

			A b c d e f g h i k l m n o p	
r	Hypodorius			p 7
s	Hypophrygi⁹	Tonus		p Chro
t	Hypolydius	Semito.	A	p ma
v	Dorius	Apotome	A	p tici
x	Phrygius	Trisemitoniũ	A	p mo
y	Lydius	Semitonium	A	di
z	Myxolydius	Apotome	A	
			A b c d e f g h i k l m n o p	

¶ Facio r pentadecachordum chromaticũ per decimam/vndecimam/⁊ duodecimam huius ⁊ similiter sex alia sc₃ s/t/v/x/y/z: facioq₃ pentadecachordum s tono acutius r.⁊ t pẽtadecachordum semitonio acutius s.v vero apotomes interuallo acutius t.et x trisemitonio amplius ꝙ v. y semitonio amplius ꝙ x.et z apotome trãscẽdere y:dico ergo septem modos chromatice modulatiõis esse ordinatos.nam r erit hypodorius s p diffinitiõem hypophrygius chromaticus.t hypolydius. v dorius. x phrygius. y lydius.z myxolydius.

28 ¶ Quo pacto singuli cuilibet inter se chromatici modi respõdeant:ostendere.

¶ Distat p precedẽtẽ hypophrygius ab hypodorio chromatico tono.et hypolydius ab hypophrygio semitonio.distat igit̃ hypolydius ab hypodorio acutior trisemitonio.et dorius ab hypolydio distat apotome.igitur dorius ab hypodorio remotus est ditono.phrygius aũt ab dorio trisemitonio.igitur phrygius ab hypodorio remouet̃ tribus tonis ⁊ semitonio:hoc est totius consonãtie diapente inual lo.et lydius a phrygio semitonio.igitur lydius ab hypodorio diapẽte atq₃ semitonio.myxolydius ab lydio distat apotome.igitur myxolydius ab hypodorio diapente consonãtia distat acutior/atq₃ tono. Et hoc pacto de reliqs ex precedẽte pfacilis ẽ ostẽsio.vt hypolydi⁹ ab hypophrygio distat semitonio. dorius tono.phrygius diatessaron.lydius diatessaron et semitonio myxolydi⁹ diapẽte.dorius a phrygio distat apotome.phrygius ditono.lydius diatessaron.myxolydius tritono.Phrygius a dorio trisemitonio.lydius tono et duobus semitoniĳs minoribus.myxolydius &c.o diatessaron.Lydius a phrygio semitonio et myxolydius tono. distat autẽ myxolydius vt iã quoq₃ dictũ est a lydio maiore semitonio.sicq₃ constructum est propositum.

29 ¶ Septem itidem enarmonicos modos ordinare.

			A b c d e f g h i k l m n o p	
r	Hypodorius			p 7
s	Hypophrygi⁹	Tonus		p Enar
t	Hypolydius	Diesis	A	p mo
v	Dorius	Diesis	A	p ni
x	Phrygius	Ditonus	A	p ci
y	Lydius	Diesis	A	mo
z	Myxolydius	Diesis	A	di.
			A b c d e f g h i k l m n o p	

¶ Sint r/s/t/v/x/y/z septem pẽtadecachorda:et sit per decimãquintam huius r pentadecachordum enarmonicum:intendo proslambanomenon pentadecachordi s vno tono amplius pẽtadecachordo r. et t diesi amplius ꝙ s.et v diesi amplius ꝙ t.et x ditono amplius ꝙ v.⁊ y amplius diesi x.et z amplius itidem diesi ꝙ y.erũt ergo ẜm acumen intensa sex post primum pentadecachorda:primo tono. deinde duabus diesibus et ditono.demum duabus diesibus:qui quidẽ intendẽdi modus enarmonice modu

lationi peculiaris ꝓpriusq habetur. sunt igitur septem pētadēcachorda r/s/t/v/x/y/z: septem enarmonice modulationis modos continētia. quod demonstrari propositum erat.

¶ Singulorum enarmonicorum modorum: ad quēlibet habitudines demonstrare. 30

¶ Huius ex precedēti demōstratio clara esse potest. Primo hypophrygiū ab hypodorio distantiā esse tonum. hypolydiū tonum et diesim. doriū sesquitonum. phrygiū diapente. lydiū diapente ac diesi. myxolydiū diapente et semitonio. Secūdo hypolydiū distare ab hypophrygio diesi. doriū semitonio. phrygium diatessaron. lydium diatessaron et diesi. myxolydium diatessaron et semitonio. Tertio doriū ab hypolydio diesi. phrygium ditono et diesi. lydiū diatessaron. myxolydium diatessaron et diesi. Quarto phrygyum a dorio ditono. lydiū ditono et diesi. myxolydium diatessaron. Quinto lydium a phrygio diesi. et myxolydium semitonio. Sexto myxolydium distare diesi a lydio. ¶ Septem enī modos et nō plures adiecit priscorum autoritas pythagoricorū. vt enī numerus a monade ad denariū vsq varius crescens ꝓgredit: mox ꝗ̄do sequens denarius vnitatis vicem obtinet primāq explicat vnitatem eiusdē indiuidue monadis consors/ et emulus: q̄ ad centenariū vsq rursus nouenaria ꝓgressiōe se extendit: relapsus tādem in tertiam vnitatem. Ita quoq vocū dissimitudo ac varietas ex quibus instar celestis harmonie concentus humani/ modiq formātur ad octonariū vsq surgit. suntq septem cōtinue voces inter se varie quibus succedens octonaria vocis plenitudo (Primus eniz numeralis cubus primaq tessera octonarius) ad primā rursus sonat vt eadē: et ad eam sese habens perinde ac denarius ad vnitatem. Et hec octonaria series in omi modulationis genere sic rata procedit: vt cōtinue octauo quoq loco octauū per similem sibi et pene eundem sonus offendat sonum. ita vt ex duobus natiua quadam/ concordiq affinitate iam vnū sonum et non multos parere videātur: vsq adeo enī se miscēt/ et mutua se iungūt/ copulātq amicitia. Et harꝫ septem vocum q̄ grauissima tardissimaq est: Saturno debetur. prima Joui: tertia Marti. quarta Phebo. quinta Veneri. sexta Mercurio. septima ꝗ̄do earꝫ acutissima/ cōcitatissimaq Lūe octaua aūt rursum reuoluit ad Saturnū/ nona ad Jouem/ decima ad Martem. et hoc pacto ꝯsequētes: vt sapiens voluit antiquitas. Et revera totius vniuersi harmonia septenario cōpleta est. et hec septem in celo celestem: in his aūt inferioribus corpoream/ sensibilēq tēperāt harmoniam: sed hec magi plenius discutiāt. hinc licet cognoscere cur hypermyxolydius: septem pythagoricis modis haud multū veniat accōmodādus. Nā si in diatonico genere myxolydium pētadecachordū ꝑ hypermyxolydio vno tono amplius acuat: totus is vbiq modus ad hypodoriū ꝯsonaret diapason/ octauusq natus esset sonus: qui ad primū idem/ congeneusq naturali affinitate redditur. quare non ab hypodorio primo modo omnifariam varius putandus est. et eque si myxolydius intenderetur trisemitonio in chromate et ditono in enarmonio: sed de his forte āplius ꝙ̄ presenti negocio par sit dictum est. Et modi quos adiecere recentiores vt diuus Gregorius ab hac modorū antiquitate recedūt. et pleraq alia q̄ posteriores musici inculcauerunt et que ab illis facile requiras. et nr̄a quoq tempestate musicum modulamen/ atq oēm concinētiam ad celeritatem quādā precipitēq leuitatem reducere conātur: modestam grauem seriāq ac decoram cōcentuū moderatiōem perparū attēdētes. a moderatiōe enī dicti sunt modi. parū item attēdentes priscū musices honestatis/ grauitatisq decus: qua amentes arreptitiosq soluebāt. sanitates inducebant feros hominum mores vt olim Thracius Orpheus/ ad māsuetos et virtutis callem reuocabant. et ex sensibiliū harmonia ad celestis harmonie desiderium captiuas aīas tanꝙ̄ sui iam memores exilij vbertim fluentibus oculis euocabant. hoc enī modorꝫ accōmoda mediocritate Pythagore discipuli faciebāt. non enī is inter hoīes modestior: cuiꝰ oīs incessus cursus videt. neq is cuius preceps nimium loquela presentium ludit intelligentiam. Ita quoq neq ij modestiores modi: qui nimia sui festinantia q̄si in venerea chorea lasciuiētes prefugiūt auditum. Hac enim de causa Pythagorea schola molles chromatis modos repudiauit et Spartiate solēni decreto Thimotheum Millesiū increpuerūt vehemēter diatonicos concētus potius approbātes. qui si apte moderētur virtutis pre se ferunt modestiam. vt enī nimia tarditate ceu torpore quodā fastidimur inani. ita nimia celeritas molliciem quādaz pre se fert inhonestam. medium enī neq celeritate preceps nec ignaua tarditate pigrum: laudabile virtutisq emulū. quā oīs etas ꝓbauit ꝓbaturaq est: et ad quā musici modi tanꝙ̄ moderationis animi quedā certe regule nos perducere debent: et ad diuina mentes nostras iugiter rapere. et felices ij erunt qui hoc fine et musicen et oēm mundanam philosophiam quesierint. neq talibꝰ deesse solet celestis fauor atq presidium. qui autez secus faciunt miseri: quales nullos ad quos nostra hec modulationū elementa peruenerint futuros desideramus: quin eis oīs harmonie vite decus: feliciter optamus/ nostriq victuros memores.

¶ Quarti elementorum Musices Jacobi Stapulensis finis.

E

¶ Jacobus Faber Stapulēsis Magnifico dño: Joanni Stephano Ferrerio designato Episcopo Versellensi studiorum amantissimo.

Is diebus metallicis formulis Arithmetices pariter atqꝫ Musices cō
missis elemētis: cogitanti michi dignissime presul quid illoꝝ facilem
h prepararet intelligētiam: occurrit si introductio quedā ex diuina illa
et Pythagorica diui Seuerini Boetij nūeroꝝ institutione in mediū
afferretur: que ꝛ vt domestica / familiarisqꝫ ante alioꝝ lectiōem ꝛ tāta
demonstrationū pōdera directrix haberet. Ita eni ferme comparatum
est vt nisi mens rite preparata fuerit: nullum in disciplinis capiat emolumentum. Ut
eni periti medici potiones / digerentiaqꝫ: fortibus p̄mittunt pharmacijs quo firmiorē
inducant valitudinem: ita quoqꝫ in omni disciplinarū genere operepreccium est intro=
ductiones p̄mittere vt faciliorem assequamur discipline intelligētiam velut quādam
perfectam nr̄e mētis sanitatem. Quapropter ilico ex libris diui Seuerini Epitomen
sum aggressus: cuius multiplex cōmoditas futura est. Ea enim assecuta: ad numeroꝝ
demonstratiōes vt quibusdam Pythagore ritibus iniciati preparatiqꝫ accedent atqꝫ
illorum librorum prisca sapientia refertorum institutionis Arithmetices: perfacilem
capessent intelligentiam. imo ex vltima comparationis diui Seuerini ꝛ Jordani for=
mula vniuersam elegātissime ꝛ nunq̄ꝫ satis laudate numerorum institutionis cōmen=
tationem consequētur facillime et ad quecunqꝫ: que numerorum desiderant operam:
viam perfacilem atqꝫ aditum. Hanc ergo introductiunculam dignissime Presul non
dubitaui nomini tuo designare: tametsi tue dignitatis habita ratione res sit exigua.
Ut qui norim q̄ꝫ feruidus oīa studia complecteris / q̄ꝫ in illis verseris assiduus schole
ꝓpe Socratice assertor: nullum preter sapientiam bonum esse / nullum preter studia
litterarum. Non potest ergo obseruantia in te mea in re litteraria grata non fore: qui
facis litteras / litteratosqꝫ omnes obseruando: vt te debeant omnes obseruare littere.
quod vtinam aliquādo pro dignitate facere possim tue virtutis iam satis longa con=
suetudine probate: iugis / assiduusqꝫ cultor. Uale.

Jacobi Fabri Stapulensis Epitome in duos libros Arithmeticos diui Seuerini Boecij ad Magnificum dñm: Joannem Stephanum Ferrerium Episcopum Uercellensem.

Inter disciplinas mathematicas quibus neglectis omnis obscuratur disciplina: tanq̄ ceterarū parens/dux atq̄ domina: primum sibi vendicat rithmetice locum que vt rite cognoscatur quēadmodū et cetere certis eget adminiculis. inter que primo menti figenda est vniuersorū circa que versatur subiecta formula/mox singulorum diffinitiones/post quas numerorum affectiones/proprietatesq̄/post proprietates: quo ex loco vniuerse sunt monstrande.

Formula vniuersorum circa que negociatur Arithmetica.

Numerus
Secundum se 2.
Ad aliquid 4.2.
Scdm figurā 3.
Numerus scdm se
Par 2.
Impar 3.
Par
Pariter par 4.
Pariter impar 6.
Impariter par 12.
Perfectus 6.
Diminutus 4.
Abundans 12.
Impar
Primus 3.
Compositus 9.
Ad alterū p⁹ 9.25.
Numerus ad aliqd
Eq̄litas 10.10.
Ineq̄litas 10.5.
Inequalitas
maior ineq̄. 10.5.
minor ineq̄l. 5.10.
Maior inequalitas
Multiplex 2.1.
Supparticlar 3.2.
Suppartiēs 5.3.
Multiplex
Duplus 2.1.
Triplus 3.1.
Quadrupl⁹. 4.1.
Quincuplus 5.1.
Superparticularis
Sesqualter 3.2.
Sesquiterti⁹ 4.3.
Sesqquart⁹ 5.4.

Sesquiquintus 6.5.
Superpartiens
Superbipartiens 5.3.
Supertripartiens 7.4.
Superquadripartiens 9.5.
Superquintupartiens 11.6.
Supersextupartiens 13.7
Multiplex superparticularis
Duplus sesqualter 5.2.
Duplus sesquitertius 7.3.
Duplus sesquiquartus 9.4.
Triplus sesqualter 7.2.
Triplus sesquitertius 10.3.
Triplus sesquiquartus 13.4.
Multiplex superpartiens
Duplus supbipartiens 8.3.
Duplus suptripartiens 11.4.
Duplus supq̄dripartiēs 14.5.
Triplus supbipartiens 11.3.
Triplus suptripartiens 15.4.
Triplus supq̄dripartiēs 19.5.
Numerus scdm figuram
Linearis 2.
Planus 4.
Solidus 8.
Planus
Trigonus 3.
Tetragonus 4.
Pentagonus 5.
Hexagonus 6.
Heptagonus 7.
Octogonus 8.
Ennagonus 9.
Decagonus 10.
Endecagonus 11.
Dodecagonus 12.
Altera parte longior 6.

Ante longior 15.
Solidus
Pyramis 4.
Cubus 8. latus 2.
Pyramis
Trigona 4.
Tetragona 5.
Pentagona 6.
Hexagona 7.
Curta pyramis 29. Sui tetragoni sūt 16.9.4.
Biscurta 25. Sui tetragoni sunt 16.9.
Tricurta 41. Sui tetragoni sunt 25.16.
Laterculus 18. Latera sunt 3.3.2.
Asser 12. Latera sunt 2.2.3.
Cuneus 24. Latera sunt 2.3.4.
Nūerus circularis 25.
Sphericus 125.
Parallelepipedus 12. Latera sunt 2.3.2.
Medietas 6.4.2.
Arithmetica 6.4.2.
Geometrica 9.6.4.
Musica 6.4.3.
Arithmetica
Continua 6.4.2.
Disiuncta 7.5.6.4.
Geometrica
Continua 9.6.4.
Disiuncta 9.6.3.2.
Quarta medie. 6.5.3.
Quinta medietas 5.4.2.
Sexta 6.4.1.
Septima 9.8.6.
Octaua 9.7.6.
Nona 7.6.4.
Decima 8.5.3.

Umerus est multitudo ex vnitatibus aggregata.

n Numerus scdm se sumptus est numerus qui in comparatione ad alterum minime consideratur/neq3 vt ad figuras geometricas applicatur.

Numerus ad aliquid: est qui in comparatione ad alterum sumptus: consideratur.

Numerus scdm figuram dicitur: prout ad figuras geometricas applicatur.

Numerus par: est qui in duo equa diuidi potest.

Numerus impar: est qui in duo equa minime diuidi potest.

Numerus pariter par: est numerus par cuius partes in duo equa ad vnitatem vsq3 sectionem recipiunt.

Numerus pariter impar est numerus par cuius media: equalium partitionem non admittunt.

Numerus impariter par: est numerus par cuius media equaliũ partitiõem admittũt sed partium in duo equa partitio citra vnitatem deficit.

Numerus perfectus est numerus par: cuius omnes cõposite simulq3 accepte partes: sui totius summam implent. Pars est que aliquoties sumpta neq3 excrescẽdo neq3 deficiendo suum totum metitur.

Numerus diminutus est cuius collecte partes: minus ipso toto reddunt. qui z impfe ctus dicitur.

Numerus abundans: est cuius in vnum adiecte partes totius summam excedunt: qui et idem superfluus nuncupatur.

Numerus primus est numerus impar: qui sola vnitate metitur. et idem quoq3 incõpositus nominatur.

Numerus compositus est numerus: quem nõ sola vnitas sed z alter numerus ipsum mensurat: qui z idem secundus appellatur.

Numerus solum ad alterũ primus est numerus: qui fm se compositus est: ad alterũ vero comparatus sola cũ illo cõmuni metitur vnitate. Par. impar.

Equalitas: est cum equalis numerus ad equalem comparatur.

Inequalitas vero est cum inequalis ad inequalem comparatur.

Maior inequalitas: est cum numerum maiorem ad minorem comparamus.

Minor vero inequalitas contra: quoties minorem maiori comparamus.

Numerus multiplex est cum maior nũerus minori comparatus: cũdem plusq3 semel continet vt bis/ter/quater: et ita deinceps.

Unitatem numerorum fontem/principiũq3: etiam numeri appellatiõe censemus.

Duplus est cum maior numerus minori comparatus: minorem bis continet.

Triplus cum ter continet.

Quadruplus cum quater.

Quincuplus cũ quinquies: et hoc pacto deinceps fm naturalẽ nũeroꝝ ꝓgressiõem.

Numerus superparticularis est cum maior numerus minori comparatus totum in se numerum minorem continet: et eius partem aliquam.

Sesqualter est numerus supparticularis cum maior totum cõtinet minorem: et eius medietatem. et idem dicitur hemiolius.

Sesquitertius est cum maior continet totum minorem: et eius tertiam partem. qui z dicitur epitritus.

Sesquiquartus est cũ maior continet totum minorem: et eius quartam partem. Et si quintam cõtinet vocatur sesquiquĩtus. et ita deinceps fm numerorum seriem.

Numerus suppartiens est cũ maior continet in se totũ minorem: et eius insup aliquot partes vt duas/tres/q̃ttuor aut quotquot attulerit ipsa cõparatio. De iis partibus id intelligitur: que minoris vnam partem non efficiunt.

Superbipartiens est cum maior continet minorem et duas eius partes.

Supertripartiens est cum tres eius partes insuper continet.

Superquadripartiens cum quattuor: et hoc pacto deinceps.

Numer⁹ multiplex supparticularis est quoties maior numerus ad minorē ꝯparatus habet eum plusq̄ semel et eius partem aliquā.
Et si bis continet ⁊ eius medietatē vocatur duplus sesqualter.
Et si bis et tertiam duplus sesquitertius.
Et si ter et medietatē triplus sesqualter ⁊ ita deinceps: ex vtriusq̄ denominatione multiplicis et supparticularis prout cōparatio attulerit noīa colligendo.
Numerus multiplex suppartiens est quoties maior numerus minori cōparatus minorem plusq̄ semel continet ⁊ insuper eius aliquot partes. ⁊ noīa sumit ꝯposita ex vtraq̄ cōparationis denoīatione. vt hec: duplus superbipartiens/duplus supertripartiens/triplus/quadruplus/quincuplus supbipartiens et similia. Et quo pacto quinq̄ sumunt̄ species cōparando maiorē numerum ad minorē eo pacto sumūtur quinq̄ correlatiue cōparato minore ad maiorē: quorum et suorū specialiū modoꝝ specierūq̄ nomina: sola sub ꝑpositione addita effingimus: que sunt. submultiplex subsuperparticularis/subsuperpartiens/submultiplex subsupparticularis/submultiplex subsuperpartiens. et species submultiplicis sunt subduplus/subtriplus/subquadruplus/subquincuplus. et hoc pacto deinceps.
Species subsuperparticularis: subsesqualter/subsesquiterti⁹/subsesquiquartus/subsesquiquintus. et hoc pacto deinceps.
Species subsuperpartientis sunt subsuperbipartiens/subsupertripartiens/ subsuperquadripartiens. et hunc in modum consequenter.
Species submultiplicis subsupparticularis subduplus subsesqualter/ subtriplus sub sesqualter et similes.
Species submultiplicis subsuppartiētis sunt subduplus subsupbipartiēs subduplus subsupertripartiens atq̄ cetere similes secundum rationis/cōparationisq̄ naturā. sed hec statim nota sunt.
Numerus linearis est qui per plures in vnam/eandēq̄ partem adiectas: describitur vnitates.
Numerus planus est qui per suas vnitates descriptus: in longū atq̄ latum porrigit̄.
Numerus autē solidus est qui per suas vnitates descriptus longitudini et latitudini crassitiem superaddit/ trinoq̄ distenditur interuallo.
Trigonus est numerus planus: qui suis vnitatibus explicatus tria latera possidet equalia.
Tetragonus: quattuor equalibus angulis perficitur.
Pentagonus: quinq̄.
Hexagonus sex.
Heptagonus septem.
Octogonus octo.
Ennagonus nouem.
Decagonus decem.
Endecagonus vndecim et hunc in modū deinceps: quos appellatione latina nuncupare possumus triāgulos/quadrāgulos/quinquāgulos/ sexangulos/ septangulos octangulos/nonāgulos/ decāgulos/ vndecāgulos et hoc pacto cōsequenter.
Numerus altera parte longior est numerus planus qui per vnitates descriptus: longitudini latitudinē habet vnitate discrepātem. ⁊ idem longilaterus appellat̄.
Numerus vero antelongior: est qui per vnitates descriptus latera sua habet plusq̄ vnitate disiuncta. hoc est longitudinē latitudini plusq̄ vnitate dissentientē.
Pyramis est numerus solidus cuius singula latera sunt ab vno planorū ad vnum cacuminis verticē eleuata. Et planus nūerus a quo latera erigunt̄: pyramidis basis nuncupat̄. Punctus autem/vnitasq̄ in quā conueniunt pyramidis conus/mucro/ vertexq̄ dicitur. que si ex base triangula nascitur: pyramis triangula nominatur. Si ex base quadrangula: pyramis tetragona. et hoc pacto deinceps.

Perfecta pyramis ea est cuius laterū ad verticē erectio: citra vnitatē non deficit.
Curta vero pyramis ea est cuius laterū erectio ad vnitatē vsqꝫ nō ascendit: cui si sola monas deest q̄ est prima pyramis: curta dicit̄. Si vnitas et planus vnus: biscurta. Si duo tricurta nominatur. et hoc pacto deinceps.
Cubus est nūerus solidus sex equis sup̱ficialibus/ planisqꝫ numeris contentus: equā de se longitudini et latitudini altitudinē prebens. et iidē numeri: tessere nūcupant̄ que duodecim equa latera semp̱ habent/ solidos angulos octo/ atqꝫ sup̱ficies sex.
Laterculus is solidus est: qui longitudini latitudinem equam habens: altitudinem possidet contractiorem.
Asser: cuius cū longitudo latitudini sit equa: altitudinē habet maiorem.
Cuneus vero qui longitudinē/ latitudinem/ et altitudinē in se cōtinet inequales
Circularis numerus est cū latus in se ducitur et tetragonus inde nascens in idem terminatur. et rursum cū idem latus in tetragonū: nascitur cubus qui in idē reuoluit̄ et is cubus sphera/ sphericusqꝫ cubus appellat̄. Et cum rursus quotiēs idem latus in cubum vel si in infinitū duxeris: qui inde nascitur numerus: in eiusdē lateris numerum terminat̄/ reuoluiturqꝫ.
Parallelepipedus solidus numerus est equidistātibus sup̱ficialibus/ planisqꝫ nūeris cōtentus neqꝫ omnino quidē equalibus neqꝫ omnino inequalibus.
Medietas est duaꝝ/ pluriūue proportionū similis habitudo.
Medietas arithmetica est medietas: cuius termini equas seruant drias.
Termini sunt numeri: medietatis proportiones constituentes.
Differentia est quo numerus numerum superat ac vincit.
Continua medietas arithmetica ea est que in tribus continue numeris continetur. Si vero in quattuor discōtinue cōtineat̄: disiūcta medietas arithmetica nūcupat̄.
Medietas geometrica est medietas cuius termini equas seruāt proportiones. Que si in tribus continue terminis cōtinetur: cōtinua. Si vero in quattuor discōtinue: disiuncta nominatur.
Medietas harmonica ea est in qua queādmodum maximus terminus ad minimum ita differētia maiorum ad differentiā minorum sese habet.
Quarta medietas est in qua queādmodum maximus terminus ad minimū: ita differentia minorum ad differentiam maiorum.
Quinta medietas in qua queādmodum medius ad minimū: ita minorum differentia ad differentiam maiorum.
Sexta est in qua queādmodum maximus ad medium: ita minorū differentia ad differentiam maiorum.
Septima vt queādmodum maximus ad minimū: ita extremorum differētia ad differentiam minorum.
Octaua quemadmodum maximus ad minimum: sic eorum differentia ad differentiā maiorum.
Nona queādmodum medius ad minimum: sic extremorū differentia ad differentiam minorum.
Decima queādmodum medius ad minimū: ita extremorū differentia ad differentiā maiorū. Et he septem vltime presertim adiecte: quo Pythagore denarius impleat̄ in tribus terminis consistunt.

Nu me ri pro pri e ta tes.

Omnis numerus circum se proxime positorum atqꝫ simul iunctorum comperitur medietas. 1
Omnis numerus duorū quorūcunqꝫ extrinsecus iacentium et ab eo equaliter distantium: itidem est medietas. 2

Nu me ri pa ris pro pri e ta tes

1 Cum numerus par in duo partitur: si earum partium vna par est et alterā parem esse necesse est.

2 Cum par itidem in duo partitur si earum partiū vna impar est: altera erit impar.

3 Par parem si multiplicet semper nascitur par.

4 Par imparem si multiplicet nascitur par.

Nu me ri im pa ris pro pri e ta tes.

1 Quilibet numerus impar in duo partitus: vt vnam partem parem ꝛ alterā imparem habeat necesse est.

2 Impar imparē si multiplicet protinus nascitur impar.

3 Impar si multiplicet parem: procreabitur par.

Nu me ri pa ri ter pa ris pro pri e ta tes.

1 Quilibet numerus pariter par partem quālibet ꝛ nomine et quātitate parem habet. Nomine quidem ꝙ denominationē habeat a numero pariter pare: quātitate vero ꝙ ea ipsa numerus sit pariter par.

2 Omnis numerus pariter par est aliquis dupliciū ab vno continue sumptoꝝ. Et quēlibet duploꝝ ab vno et solum talem: pariter parem esse necesse est.

3 Quotcūqꝫ parit̄ pares ab vno cōnumerata vnitate collecti: sequēti min⁹ vno restituūt

4 omnis numerus pariter par est diminutus.

5 Omnis numerus pariter par: ex respondentibus sibi mutuo partibus procreatur. Partes mutuo sibi respondentes: pars denominās/ et denominata.

9 Numeroꝝ pariter parium cōtinue dispositoꝝ si series est impar: quod sub extremis cōtinetur equū est ei qui continetur sub medio in se ducto. deinde sub circūpositis vsqꝫ ad seriei expletionē. Si vero fuerit par: equum est ei qui sub duobus mediis ꝯtinet̄. deinde iis q̄ altrinsecus illis adiiciūtur et hoc pacto vsqꝫ ad seriei expletionē

Nu me ri pa ri ter im pa ris pro pri e ta tes.

1 Quilibet numerus pariter impar: medietatē habet imparem.

2 Omnis numerus pariter impar quālibet sui partē alterius quātitatis retinet/ pariter et denoīationis. Nā si quātitas est par: denoīatio erit ipar/ ꝛ contra semp eueniat.

3 Omnis numerus pariter impar gignitur ex imparibus continue ab vnitate sumptis: in quos binarius ducitur.

4 Omnes numeri pariter impares sese quaternaria numerositate trāscendūt: quattuor naturali serie inceptos cōtinue relinquētes/ ꝛ ab sese cōtinue quinto loco distātes

5 Omnis numerus pariter impar: duoꝝ simul pariter impariū altrinsecus equidistāter iacentium et naturali serie collectoꝝ est medietas.

6 Omnium numeroꝝ pariter impariū pari/ ꝯtinuaqꝫ serie dispositoꝝ: duas medietates simul iunctas suis proxime altrinsecis numeris et illis qui super illos sunt vsqꝫ ad vnitatē: simul/ in vnūqꝫ collectis equari necesse est.

Nu me ri im pa ri ter pa ris pro pri e ta tes.

1 Omnis numerus impariter par aliquas eius partes habet ꝛ denominatione et quantitate respondentes: aliquas vero denominatione/ quātitateqꝫ dissentientes.

2 Omnis numerus ipariter par ex numero pariter pari et pariter ipari procreat̄.

3 Completa ad longitudinē ꝛ latitudinem impariter parium serie: qui per longitudinē descripti sunt: sextam pariter parium seruāt proprietatē. qui aūt in latitudine sextā seruant pariter imparium. Longitudo seriei est que a sinistro porrigitur in dextrū. Latitudo vero que ab imo euadit ad sursum.

Nu me ri per fe cti pro pri e ta tes.

Omnis numerus pfectus alternatim altero senario/octonarioq; terminatus cōperit. 1

Omnis numerus pfectus ex pariter paribus ab vnitate sua serie collectis nascit: qui 2
in vnum congesti/congregatiq; numeꝝ primum constituūt: in quē ducitur aggre-
gatorum maximus.

Nu me ri di mi nu ti et abun dan tis pro prie tates

Omnis n umerus diminutus: a sola monade aut a numero diminuto numerat. 1

Numerus abundans: solum abundantem numerat. 2

Nu me ri pri mi et com po si ti pro pri e ta tes.

Omnis numerus primus ad omnē quem nō numerat primus est. 1

Omnis numerus compositus: a primo numeratur. 2

Omnis numerus ꝯpositus post aliquem impariū naturali serie dispositoꝝ totus esse 3
probat: quotus numer⁹ ille ipar ab vnitate fuerit aut post aliquē supra ipm iparē
totorū: totus. Quotus/et totus: vt tertius/quitus/septimus ⁊ hoc pacto deiceps.

Omnis numerus primus aliquis impariū est hoc pacto dispositoꝝ qui post nullum 4
imparē aut aliquem supra ipsum totorum: totus venerit quotus aliquis imparium
fuerit ab vnitate.

Nu me ri ad al te rum pri mi pro pri e ta tes.

Omnes numeri adinuicē primi singuli in se ducti: numeros adinuicē primos ꝓcreāt 1

Omnis numerus minor qui ad maiorē est primus a maiore detractus quotus potest 2
et eo qui relinquet quoties potest a minore detracto: ⁊ hoc pacto cōtinue quoties
opus est: tandē que detractionis vicem impediat: relinquit vnitas.

E qua li ta tis et ine qua li ta tis pro prie ta tes

Equalitas est inequalitatis principium. 1

Omnis inequalitas ex equalitate nascitur. 2

Omnis inequalitas in equalitatem resoluitur. 3

Mul ti pli cis pro pri e ta tes.

Multiplices ceteris inequalitatibus sunt antiquiores/origineq; priores. 1

Omnis multiplex ex continua numeroꝝ serie ad vnitatem relata consurgit. Multi- 2
plex/ multiplicis modus atq; species.

Omnis multiplex maiorem habet multiplicem. 3

Spe cie rum mul tipli cis pro prie ta tes.

Omnes dupli ex singulis paribus a binario sumptis ad singulos seriei numerorum 1
ab vnitate continue comparatis: nascuntur.

Omnis triplus: a ternario duobus post singulū quēq; triplum naturalis seriei nume- 2
rorum continue dimissis procreatur.

Quadruplus itidem continue tribus post singulū quemq; quadruplū relictis nume- 3
ris nascitur. et hoc pacto de quincuplo/sescuplo ⁊ ceteris.

Su per par ti cu la ris pro prie ta tes.

Omnis superparticularis: superparticularem supra se relinquit minorem. Minorē enim 1
eam esse dicimus: cuius pars a maiori numero denominat.

Omnis superparticularis ex continua serie numerorum: continue proxime sequētis ad 2
suum precedentem comparati: sumit inicium.

Spe cie rum su per par ti cu la ris pro pri e ta tes.

Omnis sesqualter ex naturalibus/cōtinuisq; triplis: ad naturales/ cōtinuosq; duplos 1
comparatis enascitur.

Omnis sesquitertius pari pacto ex continuis quadruplis ad continuos triplos com- 2
paratis elicitur.

Omnes sesquiquarti ex continue quincuplis ad continuos quadruplos comparatis 3
simili origine extrahuntur. Et hoc pacto sesquiquinti ex sescuplis et quincuplis. et
sesquisexti ex septuplis et sescuplis ⁊ ita deinceps.

Su per par ti en tis pro pri e ta tes.

1 Omnis superpartiens maiorē supra se superpartientē relinquit. Maior ea est: que a maiore numero suam denominationē sumit.

2 Omnes superpartiētes ex continue a quinario imparibus ad numeros cōtinua serie ternario succedentes comparatis surgunt.

Spe ci e rum su per par ti en tis pro pri e ta tes

1 Continue superbipartientes nascentur si in vtrunq terminū primi superbipartientis binarius ducitur et rursus in terminos producte superbipartientis et ita quoties in productos terminos ducetur binarius.

2 Continue suptripartientes simili creatione surgent si in terminos prime supertripartientis ternarius ducitur et in productos termios. et ita deinceps. Et superquadripartientes si in primos eiusdem inequalitatis terminos duxeris quaternariū. Et idem quoq valuerit si aliū quēcunq duxeris numerū. et simili creatione reliquas superpartiētis specierum formationes elicias.

Mul ti pli ciū su per par ti cu la riū pro prie ta tes

1 Multiplices superparticulares continue nascūtur ex imparibus suo ordine a quinario collectis continue numeris a binario succedentibus cōparatis.

2 Dupli sesqualteri continue creantur: si continuis a binario paribus: numeri a quinario sese continue quinario transsilientes cōparabuntur.

3 Dupli sesquitertij itidem orientur: si perpetua serie a ternario surgentibus triplis: numeri a septenario sese coutinuo septenario excedentes cōparabuntur.

4 Dupli sesquiquarti nascentur: si a quaternario continue quadruplis: numeri a nouenario sese continue nouenario trāssilientes coaptabuntur / cōparabunturq. et hoc pacto sesquiquinti ex quincuplis et vndenariis et eque in reliquis pfacilis est inuētio.

Mul ti pli ciū su per par tien tiū pro pri e ta tes

1 Dupli superbipartientes nascentur : si octonarius ternario / et continue se octonario transgredientes continue se ternario excedentibus cōparabuntur.

2 Dupli supertripartientes certa lege nascentur: si ab vndenario et se continue eodem numero excedētes quaternario et se quoq indiscōtinuata serie iugiter quaternarij summa transsilientibus: continue cōparabuntur.

3 Et dupli superquadripartiētes a decimoquarto et se eodem transgrediētibus et quinario eodēq se excedētibus reperiūtur. Et ita omniū hac industria facillima est inuentio. Et de triplis superbipartientibus / supertripartientibus et quibuslibet aliis hac arte facile series colligitur.

Nu me ri pla ni et so li di pro pri e ta tes.

1 Omnis numerus planus in triangulos est resolubilis.

2 Omnes figure plane sibi proxime adinuicē comparate vt tetragonus trigono et penthagonus tetragono et hoc pacto consequētes sese triangulo superant.

3 Omnis numerus solidus primordiū sui tenet pyramidem.

Spe ci e rum nu me ri pla ni pro pri e ta tes.

1 Omnes trigoni surgunt si disposita naturali numerorum quātitate: prioribus semper proxime sequens adiiciatur.

2 Tetragoni sunt omnes qui numeris naturaliter et in longum et in latum duplici serie dispositis et in seinuicē quolibet in quēlibet ductis: angulares reperiunt. Angulares dicuntur qui sursum a monade diametralē seriem ad angulum e regione oppositum complent.

Omnes tetragoni ex naturali serie ordinatis imparibus in vnam summã coacervati 3
collectisq nascuntur.
Omnis tetragonus ex duobus proximis quibusq trigonis exurgit cõpositus. 4
Tetragoni: sumptis quarũcunq ab vnitate continue similium habitudinũ numeris: 5
locis imparibus vno semper in medio intermisso sumuntur.
Omnes tetragoni vna medietate iunguntur. 6
Si tetragonus tetragonũ multiplicet: tetragonus prouenit. 7
Si vero tetragonus altera parte longiorẽ: nunq̃ proueniet tetragonus. 8
Penthagoni surgũt ex numeris naturali serie ab vnitate sequẽtibus: duoꝝ continuo 9
post penthagonũ facta intmissione vna cũ priore vel priorib9 pẽthagonis collectis
Omnis penthagonus ex toto tetragono et proxime minori trigono cõponitur. 10
Hexagoni hoc pacto tribus in medio dimissis generãtur. 11
Omnis hexagonus ex trigono et proxime sequenti penthagono cõstituitur. 12
Heptagoni quattuor in medio hoc pacto dimissis numeris generantur. 13
Omnis heptagonus ex hexagono et proxime inferiori trigono constituitur. In crea 14
tione huius figure duo trigoni proxime minores debent eminus constitui.
Octogoni: quinq gignuntur intermissis. 15
Omnis octogonus ex heptagono et proximo sub se trigono surgit cõpositus. Et hoc 16
pacto de ennagonis/ decagonis/ endecagonis/ dodecagonis continue vno plura
intermittendo sentiendũ est. et ex proximis minoribus figuris et trigonis proxime
sub illis minoribus instar alioꝝ constituũtur. Quo fit vt omnes figure ex trigonis
consurgere et in eosdẽ resolui facillime deprehendãtur: quod cum ad Pythagoricã
tum ad nõnulloꝝ Platonicoꝝ intelligentiã nõnichil presidij affert et momenti

Al te ra par te lon gi o ris pro pri e ta tes.

Altera parte lõgiores ex dispositis naturaliter paribus adinuicẽ coacervatis perĩde 1
ac quadrati ex imparibus procreãtur omnes.
Omnis altera parte longior procreabitur si naturaliter ordinati pares: in naturaliter 2
dispositis imparibus singulatim ducantur.
Omnes longilateri/alteraq parte longiores circũstant angulares quadratos duab9 3
naturaliter numeroꝝ seriebus scd̃m longum latũq dispositis et in seinuicẽ ductis
Singuli altera parte longiores naturaliter dispositi singulis quadratis itidem dispo 4
sitis comparati: omnẽ numerorum partem gignunt/et procreant.
Singuli altera parte longiores naturaliter siti singulis tetragonis a secundo natura 5
liter ordinatis comparati: similiter omnes restituent superparticulares.
Altera parte longiores differẽtiis paribus perinde ac quadrati iparibus disiũgunt. 6
Altera parte longiores cõtinue in proximorũ quadratorum medio collocati: eãdem 7
proportionis habitudinẽ seruant. iterũq a dupla proportione in omnẽ superpar-
ticularium speciem se porrigunt atq diffundunt.
Omnis altera parte longior bis sumptus cum duobus altrinsecis quadratis coacer 8
uatus: quadratum efficit.
Proximi quiq altera parte longiores cum duplo medij quadrati itidem tetragonũ 9
efficiunt.
Parte altera longiores duplati suis duobus altrĩsecis quadratis aggregati: quadra- 10
tos reddunt sed quos aliquis impar numeret.
Proximi altera parte lõgiores cum duplo medij quadrati itidẽ quadratos sed quos 11
numerus par numeret: efficiunt.
Altera parte longiores naturaliter ordinati: singuli singulis naturalem seriem seruã- 12
tibus quadratis copulati: continua serie triãgulares numeros cõstituunt.
Omnes altera parte longiores: continuo ex quadratis vno detracto latere nascunt. 13

14 Altera parte longiores continue alternatim quadratis interiecti: ad quadratos habitudinum similitudinem: non autem differentiarum seruant. Contra vero intercepti quadrati ad altera parte longiores relati: continue differentiarum equalitatem: non autem proportionum retinent/obseruantque similitudinem

15 Alternati constitutis altera parte longioribus atque quadratis: a binario differentie duplantur et adinuicem eandem que et totorum est inter se: seruant habitudinem.

Py ra mi dis pro pri e ta tes

1 Omnis pyramis ex aliqua numerorum multangula figura: cui omnes congenee/similesque figure superponantur: consurgit.

2 Cuiuslibet pyramidis basis est multangulorum numerorum in pyramidis structuram aptatorum maximus

3 Pyramis trigona ex continue trigonis ad vnitatem vsque supra seinuicem erectis gignitur.

4 Et tetragona ex tetragonis et penthagona ex penthagonis/ hexagona ex hexagonis hoc pacto supra seinuicem erectis et ita deinceps.

Cu bi pro pri e ta tes

1 Cubi producentur omnes si dispositis naturaliter post vnitatem imparibus duo primi coniungantur. post quos alij tres. post quos quattuor. et hoc pacto consequenter.

2 Numeri cubi duabus eiusdem proportionis medietatibus iunguntur.

3 Si cubus cubum multiplicet: cubi forma conficitur.

4 Si cubus altera parte longiorem numeret: numquam nascetur cubus.

Me di e ta tis A rith me ti ce pro pri e ta tes

1 Medietas arithmetica suorum terminorum semper proportionum dissimilitudinem gerit

2 Medietas arithmetica continue nascetur si naturalis numerorum series indiscontinuata protrahatur. Similiter et numeris hoc modo digestis si simili intercapedine abinuicem distantes: continue accipiantur. Quo fit vt pares: naturaliter sese consequentes itidem et impares hanc medietatis normam inuiolabiliter seruent.

3 Arithmetice medietatis coniuncte medius terminus extremorum simul iunctorum est medietas.

4 Arithmetice medietatis disiuncte extremi simul iuncti collectis/ coniunctisque mediis adequantur.

5 Eiusdem medietatis vt termini ad seipsos: ita differentie ad differentias.

6 Medietas arithmetica coniuncta: sub extremitatibus minus continet eo numero qui ex medietate conficitur quantum possunt sub se due differentie que inter ipsos sunt terminos constitute.

7 Disiuncta vero tanto minus sub extremitatibus continet eo qui continetur sub mediis: quantum est quod fit ex differentia maximi ad vnum mediorum in differentiam medij eiusdem ad minimum.

8 Huius medietatis quotcunque continue dispositorum numerorum minores termini maiores proportiones: maiores vero: minores proportionum habitudines continue seruant.

9 Arithmetice medietatis determinatorum extremorum medius reperitur numerus: si extremorum coniunctorum medietas accipitur.

Ge o me tri ce me di e ta tis pro pri e ta tes.

1 Geometrice medietatis quorumcunque terminorum continue dispositorum et maiorum et minorum terminorum equales sunt proportionum habitudines.

2 Geometrica medietas suorum terminorum conuersam seruat proportionalitatem vt semper si primus ad secundum quemadmodum secundus ad tertium: ita econuerso tertius ad secundum vt secundus ad primum quod et in disiuncta medietate similiter euenire cognoscitur.

Eadem quoq; medietas quattuor terminis distributa semper permutatã proportio= 3
nalitatem retinet. vt si quẽadmodum primus ad secundũ: sic tertius ad quartum.
ita vt primus ad tertium et secundus ad quartum.
Medietatis geometrice terminorũ et eorũdem dñarum similis est proportio. 4
Medietatis geometrice que in multiplicibus existit: maior numerus ad minorẽ com 5
paratus: ipsum minorẽ suam habet differentiã/aut multiplicẽ minoris/vno minus
q̃ maioris ad minorem sit habitudo.
In continua medietate geometrica: quod continetur sub extremis/equũ est ei qui ex 6
medio in se ducto nascit. Et in discõtinua ei q̃ fit ex duab' in se ductis medietatib'
Continue proportionalitatũ species: quadratis ab vnitate & altera parte lõgioribus 7
alternatim vna serie dispositis: a prima multipliciũ medietate in omnes superparti
cularium habitudines/ proportionesq; discurrunt.
Geometrice medietatis determinatis extremis medius proportionalis reperitur: si 8
numeri sub extremitatibus contenti tetragonicũ latus accipiatur.

Me di e ta tis har mo ni ce pro pri e ta tes

Medietas harmonica in maioribus terminis maiorẽ seruat proportionẽ 1
Musice medietatis medius terminus in collectas extremitates ductus: duplum nu= 2
mero qui fit ex extremo in extremũ producit.
Musice medietatis determinatis extremis: medius reperitur terminus si per extre= 3
morũ coniunctorũ numerũ: numerus qui ex differentia extremorũ in minimũ con=
surgit diuiditur/ isq; qui ex diuisione relinquitur accipiatur atq; minimo extremo
aggregeť. diciturq; is nũerus q̃ ex diuisione relinquiť latitudo/latitudinisq; latus
Contingit ex harmonica medietate: primordiũ consonantiarũ consonãtiasq; musicas 4
omnes elicere.

Re li qua rũ me di e ta tũ pro pri e ta tes

Si quarte medietatis extremi adinuicẽ sunt habitudinis duple: quod continetur sub 1
maximo et medio duplũ est ei qui cõtinetur sub medio & minimo. Et omnino que
habitudo maximi ad minimũ. ea erit eius quod sub maximo et medio continetur
ad id quod continetur sub medio & minimo et id in omni medietate cõmune est
Si quinte medietatis medius ad minimũ sit duplus: quod cõtinetur sub maximo ter 2
minorũ et medio: duplũ erit ad id quod cõtinetur sub extremis. Et omnino q̃ habi
tudo medij ad minimũ: ea erit numeri qui fit ex maximo in medium et minimũ. et id
quoq; omnibus publicũ atq; cõmune est.

Diuus Seuerinus medietatũ denariã Pythagore plenitudinẽ impleuit: Jordan'
autẽ denario vnitatẽ adiecit.

Denarius medietatũ Boetij.	
Prima	1.2.3.
Secunda	1.2.4.
Tertia	3.4.6.
Quarta	3.5.6.
Quinta	2.4.5.
Sexta	1.4.6.
Septima	6.8.9.
Octaua	6.7.9.
Nona	4.6.7.
Decima	3.5.8.

Undenarius medietatũ Jordani.	
Prima	1.2.3.
Secunda	1.2.4.
Tertia	3.4.6.
Quarta	1.4.6.
Quinta	6.9.11.
Sexta	3.4.6.
Septima	3.4.7.
Octaua	4.6.7.
Nona	3.5.6.
Decima	6.7.9.
Undecima	6.8.9.

Formula proprietatū ex Boetio reperiendarū/ atqꝫ ex Jordano demonstrandarum.

Divus Severinus Boetius			Jordanus.	
Numerorum proprietates.	Caput.	Liber.	Propositio.	Liber.
Numerus.				
1	7	1	2	1
2	7	1	2	1
Numerus par.				
1	5	1	2	7
2	5	1	2	7
3	46	2	10	7
4	46	2	12	7
Numerus impar.				
1	5	1	3	7
2	46	2	11	7
3			10	7
Numerus pariter par.				
1	9	1	31	7
2	9	1	29	7
3	9	1	32	7
4	9	1	54	7
5	9	1	25	4
6	9	1	26.40	2.7
Numerus pariter impar.				
1	10	1	33	7
2	10	1	34	7
3	10	1	35	7
4	10	1	35	7
5	10	1	2	1
6	10	1	3	1
Numerus impariter par.				
1	11	1	37	7
2	11	1	38	7
3	11	1	40	7
Numerus perfectus				
1	20	1	0	0
2	20	1	60	7
Numerus diminutus et abundās				
1	0	0	55	7
2	0	0	55	7
Numerus primus et compositus				
1	0	0	1	3
2	0	0	2	3
3	17	1	25	7
4	17	1	25	7
Numerus ad alterum primus.				
1	17	1	12	3
2	18	1	15	3

Diuus Seuerinus Boetius Jordanus.

Numerorum proprietates.	Caput.	Liber.	Propositio.	Liber.
Equalitas/inequalitas.				
1	32	1	70	9
2	32	1	70	9
3	1	2	75	9
Multiplex.				
1	26.27.	1	38.70	9
2	23	1	37	9
3	23	1	52	9
Species multiplicis.				
1	23	1	38	9
2	23	1	38	9
3	23	1	38	9
Superparticularis.				
1	24	1	52	9
2	24	1	37	9
Species superparticularis.				
1	24	1	38	9
2	24	1	38	9
3	24	1	38	9
Superpartiens.				
1	28	1	52	9
2	28	1	42	9
Species superpartientis.				
1	28	1	7	2
2	28	1	7	2
Multiplex superparticularis				
1	29	1	43	9
2	29	1	7	2
3	29	1	7	2
4	29	1	7	2
Multiplices suppartientes.				
1	31	1	7	2
2	31	1	7	2
3	31	1	7	2
Numerus planus.				
1	6	2	0	0
2	19	2	0	0
Numerus solidus.				
1	21	2	0	0
Species numeri plani.				
1	9	2	1	8
2	27	1	38	9
3	12	2	26	7
4	18	2	5	8
5	38	2	10	6
6	46	2	4	6

Diuus Seuerinus Boetius. Jordanus.

Numerorum proprietates.	Caput.	Liber.	Propositio.	Liber.
7	46	2	14	6
8	46	2	14.26	6
9	14	2	12	8
10	18	2	12	8
11	15	2	14	8
12	18	2	14	8
13	16	2	21	8
14	18	2	21	8
15	16	2	22	8
16	00	0	00	0
Parte altera longior.				
1	26	2	27	7
2	28	2	38	9
3	27	1	38	9
4	33	2	38	9
5	33	2	38	9
6	33	2	27	7
7	33	2	38	9
8	33	2	32	6
9	33	2	31	6
10	33	2	32	6
11	33	2	31	6
12	34	2	11	8
13	35	2	10.5	1.8
14	37	2	38.5.2.22	9.8.1.10
15	37	2	20	10
Pyramis.				
1	23	2	28	8
2	23	2	28	8
3	23	2	27	8
4	23	2	28	8
Cubus.				
1	39	2	28	7
2	46	2	4	6
3	46	2	16	6
4	46	2	17.26	6
Medietas arithmetica.				
1	43	2	1	10
2	43	2	0	0
3	43	2	2	1
4	43	2	3	1
5	43	2	0	0
6	43	2	3	10
7	43	2	20	1
8	43	2	16	2
9	50	2	5	10

Numerorum proprietates.	Caput.	Liber.	Propoſitio.	Liber.
Medietas geometrica.				
1	43	2		
2	44	2	1	2
3	44	2	3	2
4	44	2	20	10
5	44	2	5	2
6	44	2	25.26	2
7	44	2	0	0
8	50	2	38	9
Medietas muſica.				
1	45	2	34	10
2	47	2	37	10
3	50	2	40	10
4 ex muſica	48	2	32	3
Quarta medietas.				
1	51	2	7	2
Quinta medietas.				
1	51	2	7	2

Epitomes librorum Arithmeticorum Boetij finis.

Jacobus Stapulenſis Bernardo Vencario doctori medico numerorum amatori.

[c]onſideraſti mi Bernarde: oēs diſciplias ad quas generoſo ſpiritu ſit annitendum difficiles eſſe ſiquidem virtus oīs circa difficile verſetur. verū hāc difficltatem nullos vnq̄ abſterrere: preter eos ſolos qui de re litteraria male meriti quod capere diffidant ceteris diſſuadent: aut ꝙ ipīs inuideant velut felicioribus/aut potius ꝙ eos ipōs neſcire pudibūdum ſit. At ſcis q̄ procul preſertim ab hoc p̄clariſſimo Parhiſiēſi ſtudio liuor oīs abſit/q̄ ignorātia pellat/ q̄q̄ probent Clitomachū Cartaginienſem qui quadrageſimū annum natus: primū ſtudia litterarū petijt. in quibus adeo pfecit vt Carneadi ſederit ſucceſſor. quominus dubitādum eſt hūc locum: tutam eē diſciplinarum ſtationem/ſecurūq̄ portum: et vndecunq̄ aduenerint benigno excipi fauore/ peramicoq̄ hoſpitio. Quapropter cum Arithmetice ꝛ Muſice ſupioribus diebus in ſtudentiū fauorem: huic loco tanq̄ aſyllo cōmitterētur voluiſti Rithmimachiā ſimul formari: ludum quidem numerorū non illiberalem/ſed quem deceat ſtudioſos adoleſcentes cognoſcere ne nimiū tetrice videātur aduentaſſe diſcipline ꝛ quo interdum ſtudio defeſſi primi earum Tyrones ſolent animum et cum vtili ocio/tum honeſto vires cuſtodiāt incolumes. tale profecto conſilium medicum decuit. Et ſi qui hanc ludi honeſtatem amabunt: gaudebunt tua opera poſt ſerias diſciplinas hic eſſe inſertum. Introducunt Alcmeon mathematicus Pythagore diſcipulus: ꝛ Brōtinus ꝛ Bathillus eius temporis adoleſcentes. Vale.

Alchmeon q̃ tempestiuus ades. Alc. quid hoc o adolescētes. Bat. q̄m non nichil abs te ego ꝛ Brōtinꝰ perdiscere cupimus. Alc. quid nam id o Bathille. Bat. Priusq̃ in secentorum numero Pythagoram cōgrediamur: cupimus in rudibus aliq̃tulū formari. Et cū iam e nocturno cōgressu redeunt Pythagore discipuli sciscitamur leuiora quedā que silenda non tradiderit. Atq̧ nosipsi iam Abacum atq̧ mensulam perdidicimus. nūc aūt ludum quendā querimus inter vos confictū: plerūq̧ vestras curas post seria studia leuantem ꝛ quem vos ipi in numeris vt et pleraq̧ alia exercere soletis. Alc. Rithmimachiam o Bathille forsitan ītelligis. Bat. Eam ipsam Alcmeon. Alc. Dic age igitur Bathille quot numerorū simplices inequalitates. Bat. Tres: multiplex/ supparticularis/ ꝛ superpartiens. Alc. Maioris scȝ habitudinis ad minorem. et in his tribus gn̄ibꝰ oīno cōsistit ludus a te ꝛ Brōtino nūc a me petitus. Quid maxima harmonia: et quid harmonia minor? Bat. Maxima harmonia est cū quattuor numerorū in geometrica medietate cōstitutorū: extremi ad vnū mediorū Arithmeticam/ ad alterū vero Musicam seruāt medietatē. Et harmonia minor solum in q̃ttuor terminis duas seruat medietates. Et quid medietas Arithmetica/ quid Geometrica/ et quid Musica vocet: dudum perq̄si- uimus/ atq̧ satis q̄d sint nos ipi nobis tenere ꝑsuademus. Alc. Recte multa tenes o Bathille. attn̄ paulo latius hoc in loco noīe vtūtur maxime harmonie: vt eaipā dicat quoties in quattuor terminis minoribus quidē maiores gradatim sequētibus: he tres repiūtur ꝓportionū medietates. mox dispo nunt p̄mo duobus ordinibus multiplices ex quattuor primis paribus ortos atq̧ ab ipis denoīatos: duplos/ quadruplos/ sescuplos/ octuplos in leui/ planaq̧ area q̄ sit sexaginta q̃ttuor quadris spacijs dirempta alternis se intersecātibus lineis. post quos itidem duobus ordinibus cōsimiles supparticu lares locant: sesqualteros/ sesquiquartos/ sesquisextos/ atq̧ sesquioctauos. dehinc cōsimilit supparti- tientes illis quidē affines/ atq̧ cōgeneos: supbipartiētes/ supquadripartiētes/ supersextupartiētes/ atq̧ supoctupartiētes. et spacia illa campos vocant et ordinatos in ipsis numeros parium aciem. Et e regione in totidem campis/ similiq̧ processu multiplices ordinant a quattuor p̄mis imparibus du ctos atq̧ ab eisdem denoīatos: triplos/ quincuplos/ septuplos/ nōcuplos. post quos consilēs suppar- ticulares. post superparticulares cōsimilis affinitatis suppartiētes/ structeq̧ erūt e regione duobus ordinibus hic imparium/ illic vero parium acies hoc pacto

Acies Parium in Rithmimachia.

Duces superpartientium.			25	81	169	289			Calculi quadrā-
Comites suppartientium.			15	45	91	153			tales.
Duces supparticularium.			9	25	49	81			Triquetri.
Comites supparticulariū.			6	20	42	72			Triquetri.
Duces multiplicium.			4	16	36	64			Rotundi.
Comites multiplicium.			2	4	6	8			Rotundi.
Primi campi prime aree.									
Primi campi secunde aree									
Comites multiplicium.			3	5	7	9			Calculi rotundi.
Duces multiplicium.			9	25	49	81			Rotundi.
Comites supparticulariū.			12	30	56	90			Triquetri.
Duces superparticulariū.			16	36	64	100			Triquetri.
Comites suppartientium.			28	66	120	190			Quadrātales.
Duces superpartientium.			49	121	225	361			Quadrātales.

Acies Imparium in Rithmimachia.

Bat. Satis hanc numerorum assituationem appꝛ̄hendo. Alc. Vbiq̧ consilium respōsus vt campi sibi inuicem subiecti duplos/ sesqualteros/ mox superbipartiētes tenent: et iterū sibi mutuo subiecti quadruplos/ hinc sesquiquartos/ atq̧ supquadripartiētes. Et hoc pacto de reliquis. Attn̄ assignati numeri designatos sibi vendicant calculos eisdē numeris inscriptos: multiplices quidē rotūdos sup particulares trigonos/ suppartiētes tetragonos: excepto decimi noni loci parium numero qui tetra- gona Pyramis est sex p̄mis tetragonis orta: ꝛ hinc sex basium/ sexq̧ facierū Pyramis dicitur. Huic ergo numero mete Pyramidisq̧ forma debita est: que primos sex quadratos mīoribus quidē maio- ribus suppositis: habeat inscriptos. et hec ꝑfecta Pyramis nūcupatur ꝙ citra vnitatem eius Pyra- midis mucro atq̧ vertex non deficiat. Cōsimili quoq̧ modo vicesimi loci imparium nūero imperfecte Pyramidis tetragonice forma debita est cui Pyramidi tres p̄mi tetragoni ad complementū desint atq̧ iccirco tricurta dicitur et quia ex quinq̧ sequentibus tetragonis surgit: iccirco quinq̧ basium/ facierūq̧ eadem Pyramis nūcupatur. et illi quinq̧ tetragoni suis lateribus suo modo inscribūtur.

Bront. quid est Alcmeon ꝙ calculos in officinis extornātium multicolores sepenūero egoipse aspexerim. Alc. neq; absurde queris Brontine. hoc ad acierū discrimen existimāt: sed duo colores michi satis esse videntur vt acies pariū sit nigricans ꝙ pares ad mundū pertineānt sensibilē. acies autem impariū niuea sit et candicās: ꝙ impares masculi sint et indiuidue semperq; eiusdē substantie exprimant similitudinē. Pyramides tamē ob excellentiā cum sue nature tum diuinitatis quadratorū substantie ex quorū coaceruatione surgunt coalescuntq; nobili quodā par est insignire colore. vt perfectā pyramida rubro et tricurtā ceruleo. Bat. Perfectiorē colorem pyramidi parium tribuis ꝙ ei que presidet aciei impariū. Alc. Nec iniuria o Bathille nam et eadē impar est et in eius mucrone ac vertice summo residet diuinitas. et latus sue basis infime: primus est a monade perfectus numerus/ et suarū basium numerus eiusdē sue basis latus est/ numeri utq; perfectus. et illa eadē sua basis primus est sensibiliū rerūq; mobiliū circulus: verūtamē in ordine circulorū tertius. primus enī simplicissimus est atq; plenissimus cuius centrum vbiq; est et circunferentia nusq̄. secundus est eternitatis horizon atq; supra tempus. tertius est horizon eui at cū tempore indefessa vertigine reuolutus. primus est nr̄e pyramidis sūmus mucro/ sūmusq; vertex. secūdus secūda basis. tertius prima/ infimaq; basis. Bat. Paradigmata fingis Alcmeon: ludum querimus non symbola. Alc. Recte āmones Bathille. verū ego memetipm̄ negligebā: et a suscepto officio deerrabam longius. colores ergo vestri arbitrij sunto. nam cū et alijs vsi fueritis nichil refert. verū quod superest his paucis deprehendetis regulis: et quo in re parua modicus vobis satis sit sermo regularum Prima sit hec.

¶ Calculi vndecūq; in vacuos dimoueātur campos: rotondi in secūdm. trigoni in tertium. tetragoni cū sua pyramide in quartum. Bat. Dimoueri in secūdm intelligis forte in proximū campum. Alc. Ita volunt. est enim secundus a se sed post se primus. 1

¶ Secūda. Calculus oīs quōcūq; recto incessu calculum tollere potest: sz angulari atq; obliquo nunq̄. 2

¶ Tertia. Numerus numerum partis aduerse et quātitatis eiusdez suo recto cursu offendēs: eūdem tollit. 3

¶ Quarta. Si duo numeri eiusdē partis: numero partis aduerse quē iuncti cōstituūt: circūponātur: clausum auferūt. hinc fit vt ternarius et quinarius clausum octonariū partis aduerse tollant: et quaternarius et octonarius duodenarium. et hoc pacto de similibus. 4

¶ Quinta. Si inter duos aduerse partis numeros vacui interiacētes campi per minorem numerum multiplicati maiorem efficiant: numerus tollit maior. hinc euenit vt binarius duodenariū sex interiacentibus campis auferat/ et sextumdenarium octo. et ternarius senariū interiacētibus duobus/ et nouenarium tribus: et quintumdenarium quinq;. 5

¶ Sexta. Quicūq; numerus: cui vt recto calle dimoueatur oīs adempta est potestas: tollitur. 6

¶ Septima. Si maxima pyramidis basis offendit pyramidem: eam tollit. si offenditur: tollitur. 7

¶ Octaua. Si numerus per interceptos cāpos multiplicatus basim pyramidis maximam restituat eandem tollit. 8

¶ Nona. Si alie bases pyramidem offendant cōsimilis in campis (si adest) auferatur: et idem eueniat si numerus per interualla multiplicatus aliquam illarum basium efficiat. si offendātur: eedem tollātur. 9

¶ Decima. Victoria parta est si in aduersis castris maxima constituitur harmonia. itidem sed inferior ignobiliorq;: si constituitur harmonia minor. 10

¶ Undecima. Calculi acquisiti ad complendam harmoniam aduerse parti auxiliares accipiūtur. 11

¶ Duodecima. Cū maxima harmonia paratur calculus ad complendam harmoniam acquisitus a suo loco non dimouetur. 12

Maxime	d	c	b	A				
Victorie	2	3	4	6	2.4.6 Medietas arith.	2.3.4.6 Geo.	2.3.6 har.	1
Pro acie	4	6	8	12	4.8.12 Medietas arith.	4.6.8.12 Geo.	4.6.12 har.	2
Parium	6	8	9	12	6.9.12 Medietas arith.	6.8.9.12 Geo.	6.8.12 har.	3
	4	6	9	12	6.9.12 Medietas arith.	4.6.9 Geo.	4.6.12 har.	4
	2	9	16	72	2.9.16 Medietas arith.	2.9.16.72 Geo.	9.16.72 har.	5
Maxime	3	5	15	25	5.15.25 Medietas arith.	3.5.15.25 Geo.	3.5.15 har.	1
Pro acie	5	9	45	81	9.45.81 Medietas arith.	5.9.45.81 Geo.	5.9.45. har.	2
Impariū	5	25	45	225	5.25.45. Medietas arith.	5.25.45.225. Geo.	25.45.225. har.	3
Minores	5	15	25	45	5.25.45 Medietas arith.	5.15.45 Geometrica.		1
Victorie	12	15	16	20	12.16.20 Medietas arith.	12.15.16.20 Geometrica.		2

Prime maxime victorie consonantie musice
A b diapente
B c diatessaron
A c diapason
A d diapason ac diapente
B ad dextram c d bis diapason

Secunde maxime victorie consonantie musice
A b diapente
B c diatessaron
A c diapason
A d diapason ac diapente
B ad dextram c d bis diapason

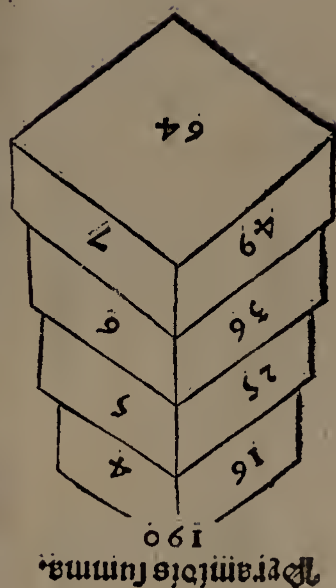
Tertie maxime victorie consonantie musice
A b diatessaron
B c tonus consonantiarū principiū.
A c diapente
A d diapason
A ad dextraz a c diapasō ac diapēte
C ad dextram c d bis diapason

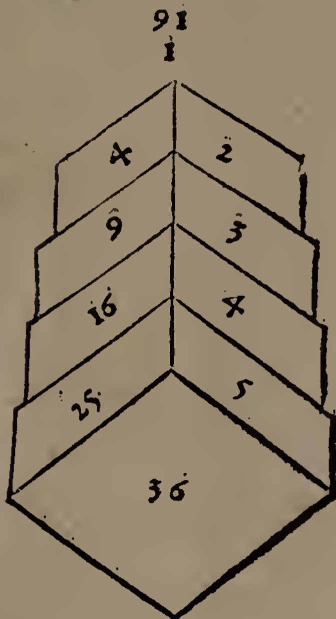
¶ Minores victorias ꝑpaucas posui: vt vos venatoribus similes relinquã: qui magis fere inuẽtione ꝙ oblata sine venatione gaudere solent. Ex tribus tamen Bathille preceptis minorum victoriarum cognitio pendet.

¶ Primum. Datos duos camporũ numeros iunge: iũctorũ dimidium est inter eos in Arithmetica medietate medius numerus.

¶ Secundum. Datis itidem duobus nũeris: duc primũ in scdm: et ꝓducti accipe latus tetragonicũ. et illud est eorum rationis geometrice medius numerus.

¶ Tertium. Datos duos numeros aggrega: et qui aggregatus est serua. duc primũ in scdm / et ꝓductum dupla / et duplatũ diuide per seruatum aggregatũ: et qui ꝓuenit est illoꝝ numerorũ harmonice ꝓportiõalitatis medius. Et si hoc pacto queadmodũ hec tria docẽt precepta integros numeros non reperias: numeri dati nullos habebũt in illa rõne / ꝓportiõalitateqꝫ medios. et nõ modo minores victorias: scu sint ex Arithmetica et Geometrica / seu ex Arithmetica et Harmonica / seu ex Geometrica et Harmonica reperias: sed et si volueris maximas. Verũ solent o Bathille aliter cãpos / acierũ duces / comitesqꝫ ordinare. vt area sit camporũ sexagintaquattuor. aut limite camporum medio aciem vtranqꝫ dirimẽte superadiecto duorum atqꝫ septuaginta.





¶ Et campis hoc modo digestis rudes adhuc et quos ad mysteria ipse cetus silẽtium candidissimus pater nondum admittit ex supioribus preceptis inter se concertant. mox vo puerilibus actis / iocisqꝫ reiectis ad silentia hymnosqꝫ assuefacti: presentia preceptoris tanꝙ numinis cuiusdã fruũtur / solan

tur/ et vitam sine crimine transigunt innocuam/ labeq̃ carentem. hoc illis studium/ hoc solamen/ hec vigilantissima cura:

Ut sese totos rimentur ad vnguem
Ne quid hiet/ ne quis perturbet se angulus/ equis
Partibus vt coeat/ nil vt declinet amussis.
Nec prius in dulcem declinant lumina somnum:
Omnia q̃ longi reputarint acta diei.
Quo pretergressi/ quid gestum in tempore/ quid non.
Offensi prauis: dant palmam et premia rectis.

¶ Tales candidi discipulos decet esse Pythagore. Ergo meum consilium est o Bathille et Brontine generosi adolescentes: vt tantisper ludo indulgeatis dum tenerior etas vos ad altiora conscẽdere non sinit/ dum tardat aditum. mox aũt plusculo robustiores animo facti: nostrum silẽtium querite/ et vos nostro cetui comites asciscite: vitam semper que frugi sit querentes innocuam. et me potius magistro (aut si mauultis vobiscũ condiscẽte) doctrinam/ moresq̃ q̃ iocos discite. vos aũt dũ etas teneriuscula patitur: a iunioribus que petiti ludi supsunt vel q̃ facillime discetis/ nũcq̃ ambo recte valete. Bat. Nos q̃ valemus/ q̃q̃ possumus o Alcmeon ego et Brõtinus: bonas pro tue humanitatis officio habemus nunc/ habebimusq̃ semp gratias. et cognoscimus te preter dignitatem hec minutula percõtatos esse. qd vero superest nobis facile vẽdicabimus. atq̃ tu interim dũ te ad seria magis erga nos vtemur preceptoris opera: nostri semper memor felicissimus valeto.

Rithmimachie Finis.

¶ Has duas Quadriuij partes et artium liberalium precipuas atq̃ duces cum quibusdam ãminicularijs adiectis: curarunt vna formulis emendatissime mandari ad studiorum vtilitatem Joannes Higmanus/ et Uolgangus Hopilius suis grauissimis laboribus et impensis Parhisij Anno salutis domini: qui oĩa in numero atq̃ harmonia formauit 1496 absolutũq̃ reddiderunt eodem anno: die vicesima secunda Julij suos labores vbicunq̃ valebunt semper studiosis deuouentes. Et idem quoq̃ facit Dauid Lauxius Brytannus Edinburgensis: vbiq̃ ex archetypo diligens operis recognitor.

Registrum presentis operis.

a b c d e f g h i
Omnes quaterni.

a
Primum: In hoc opere.
Secundum: Jordani Nemorarij.
Tertium: ¶ Sint a b c d e f.
Quartum: c in se.

b
Primum: ¶ Si duo numeri.
Secundum: simãquintam.
Tertium: nũerans qui et idem.
Quartum: ¶ Numerorũum cõtinue.

c
Primum: ¶ Nam si.
Secundum: ¶ Quadratus cubicus.
Tertium: ¶ Si fuerint duo numeri.
Quartum: ¶ Si quotlibet.

d
Primum: q̃ precedens.
Secundum: ¶ Si sumãtur.
Tertium: parte longior.
Quartum: sequens tetragonum.

e
Primum: numeratas.
Secundum: ¶ Datam proportionem.
Tertium: ¶ Multiplicem.
Quartum: cunt ex trina.

f
Primum. ¶ Jacobi.
Secundum: ¶ Jacobi.
Tertium: ¶ Si terminorum.
Quartum: A supparti.

g
Primum: interuallo e d
Secundum: proportiones esse.
Tertium: ¶ Itidem ditonus.
Quartum: ¶ Differentia.

h
Primum: f ad g.
Secundum: ad q fiat p.
Tertium: ¶ Sint pro reliquis.
Quartum: ¶ Sint numeri.

i
Primum: Numerus multiplex.
Secundum: Numeri paris.
Tertium: Suppartiẽtis.
Quartum: Altera parte.

Mgri Jhis Bapte Caluci de pistorio